

Bolzano-Weierstrass-tételnek több, de egymáshoz szorosan kapcsolódó tételt neveznek az analízisben. Egyfelől az $\mathbb{R}^N$ -beli sorozatok elméletében rámutathatunk, hogy minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata, ezt néha **Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételnek** nevezik. Másrészt zárt és korlátos $\mathbb{R}^N$ -beli halmazban haladó sorozatnak van a halmazbeli határértékkel rendelkező részsorozata. Harmadrészt $\mathbb{R}^N$ -beli végtelen, korlátos sorozatnak van torlódási pontja.

Tartalomjegyzék

- 1 Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel
 - ♦ 1.1 Az egyváltozós eset
 - ◊ 1.1.1 Bizonyítás csúcselemmel
 - ◊ 1.1.2 Bizonyítás Borel-Lebesgue-tétellel
 - ◊ 1.1.3 Intervallumfelezéssel
- 2 Többváltozós eset
 - ♦ 2.1 Bizonyítás
- 3 B-W-tétel mint a B-W-féle kiválasztási tétel következménye
- 4 Ellenpélda végtelen dimenzióra
- 5 Példa alkalmazásra
- 6 Külső hivatkozások

Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel

$\mathbb{R}^N$ -ben korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Az egyváltozós eset

$\mathbb{R}$ -ben ehhez a tételhez még a következő kommentárt fűzhetjük. Egy valós számsorozatnak, ha nem korlátos, biztosan van **sűrűségi pontja**, azaz olyan pont, melynek minden kipontozott környezetében végtelen sok elem van. Ez amiatt van, hogy az egydimenziós esetben értelmezhető az, hogy a $+$ és $-$ értékek sűrűségi helyek legyenek, és pedig a $+$ gömbi környezetei az

$$\left(\frac{1}{r}, +\infty\right)$$

alakú intervallumok, ahol r pozitív szám (melyet a környezet sugarának nevezünk). Világos, hogy nem-korlátos sorozatra a két végtelen érték valamelyike sűrűségi hely lesz.

Ennél érdekesebb kérdés, hogy van-e sűrűségi pontja egy korlátos sorozatnak. Erre majdnem triviális indoklást a lenti Borel-Lebesgue-tétel szerinti bizonyítás ad. Jobban rávilágít azonban az indokra a csúcselemes vagy a felső és alsó határértékeket felhasználó igazolási mód.

Bizonyítás csúcselemmel

Belátjuk, hogy minden valós sorozatból kiválasztható monoton részsorozat.

Ehhez először vezessük be a *csúcselem* fogalmát. a_k -t csúcselemnek nevezzük, ha minden $n > k$ esetén $a_n \leq a_k$. (Vagyis azokat az elemeket nevezzük így, amelyeknél a nagyobb indexű elemek között nincs nagyobb.)

Ekkor két eset lehetséges:

Bolzano-Weierstrass-tétel

1. Végtelen sok csúcselem van a sorozatban. Ha $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ indexek, melyekre $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$ csúcselemek, akkor ez utóbbi sorozat nyilvánvalóan monoton csökken?
2. Véges sok csúcselem van a sorozatban. Vagyis létezik n_0 , hogy minden $n \geq n_0$ esetén a_n nem csúcselem.
 - De a_{n_0} nem csúcselem, vagyis létezik $n_1 > n_0$, hogy $a_{n_1} > a_{n_0}$.
 - De a_{n_1} nem csúcselem, vagyis létezik $n_2 > n_1$, hogy $a_{n_2} > a_{n_1}$ stb.

Ekkor viszont $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$ nyilván szigorúan monoton növekvő sorozat.

Vagyis minden sorozatnak van monoton részsorozata. De a mi sorozatunk egyben korlátos is, márpedig korlátos monoton sorozat konvergens.

Bizonyítás Borel-Lebesgue-tétellel

Azt fogjuk belátni, hogy a sorozatnak van sűrűsödési pontja, azaz olyan pont, melynek minden nyílt környezetében van végtelen sok sorozatbeli elem. Ekkor ugyanis már kiválasztható az u sűrűsödési helyhez konvergáló részsorozat: minden n -re:

$$b_n = \min\{i > n \mid |a_i - u| < \delta_n\}$$

ahol (b_n) egy szigorúan monoton csökkenő nullsorozat.

Legyen $[a, b]$ olyan korlátos és zárt intervallum, mely lefedi a sorozatot. Tegyük fel indirekt módon, hogy a_n -nek nincs sűrűsödési helye. Ekkor minden $x \in [a, b]$ -nek létezik olyan nyílt környezete, melyben csak véges sok sorozatbeli elem van. Az $[a, b]$ intervallum ezen halmazokból álló nyílt lefedéséből kiválasztható véges sok, mely még mindig lefedés, és pedig a Borel-Lebesgue-tétel miatt. Tehát a sorozatnak összesen véges sok szor véges sok, azaz véges sok eleme lehet $[a, b]$ -be, ami ellentmond annak, hogy a sorozatnak végtelen sok tagja van és ez mind $[a, b]$ -ben van.

Intervallumfelezéssel

Legyen (a_n) korlátos számsorozat, ekkor (a_n) lefedhető valamely $[a, b]$ korlátos és zárt intervallummal. Intervallumfelezéssel rekurzív módon definiálni fogunk egymásba skatulyázott, nullához tartó hosszúságú intervallumok (I_k) sorozatát a következőképpen.

- $I_0 := [a_0, b_0] := [a, b]$
- Ha k természetes szám, és $I_k = [a_k, b_k]$ már definiálva van, akkor osszuk két egyenlő hosszúságú részre: $I_k = [a_k, c_k] \cup [c_k, b_k]$. Valamelyikben a sorozatnak bizonyosan végtelen sok különböző indexű tagja van (ellenkező esetben ugyanis nem beszélhetnénk végtelen sorozatról). Természetesen előfordulhat, hogy mindkettőbe végtelen sok tag esik. A meghatározottság kedvéért legyen I_{k+1} a két fél közül az az intervallum, melyben végtelen sok különböző indexű tag esik és ezek közül a jobboldali félintervallum. (Ezzel azt értük el, hogy az intervallumsorozat minden tagjában lesz sorozatbeli elem.)

A Cantor-axióma (vagy Cantor-féle közöspont tétel) szerint, mely az egymásba skatulyázott intervallumokról szól az (I_k) intervallumsorozatnak létezik egyetlen közös pontja, legyen ez c .

Megállapíthatjuk, hogy minden k természetes számra végtelen sok olyan i index (természetes szám) van, hogy $a_i \in I_k$, tehát minden k természetes számra igaz, hogy

$$H_k = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \in I_k\} \neq \emptyset.$$

Bolzano-Weierstrass-tétel

Megjegyezzük, hogy a természetes számok jólrendezési tulajdonsága miatt ezeknek a nemüres halmazoknak van minimális elemük. Ezekből a halmazokból kell kiválasztanunk egy (i_k) indexsorozatot (tehát egy szigorúan monoton növekvő sorozatot). Ezt szintén rekurzióval tesszük.

- $i_0 := \min H_0$
- Ha már i_k definiálva van minden k -nél nem nagyobb természetes számra, akkor legyen i_{k+1} az a szám, amelyik nagyobb az eddig definiált véges sok elemnél és a legkisebb ilyen elem H_{k+1} -ben.

Ekkor az

$$(a_{i_k})$$

sorozat c -hez konvergál. QED

Megjegyzések. Vegyük észre, hogy bár kiválasztásról van szó, mégsem kellett használnunk a kiválasztási axiómát, hiszen a természetes számokat a szokásos rendezés jólrendezi, így mindig konstruktívan (egyértelműen megnevezve) tudunk kijelölni egy elemet a nemüres részhalmazokból.

A másik hasznos tulajdonsága a bizonyításnak, hogy kis módosítással többet is állíthatunk segítségével. Ha a fenti konstrukcióban a végtelen sorozatelemet tartalmazó intervallumok közül mindig a felső választjuk, akkor az intervallumok közös pontja a sorozat felső határértéke, azaz a legnagyobb sűrűsödési hely

$$\limsup(a_n)$$

lesz. Ha mindig az alsó intervallumot, akkor a legkisebb sűrűsödési helyhez jutunk azaz

$$\liminf(a_n)$$

-hez.

Többváltozós eset

Itt a csúcselemes bizonyítás nem működik abban az értelemben, hogy közvetlenül nem hivatkozhatunk rájuk, mert nincs $\mathbf{R}^N$ -ben a műveletekkel kompatibilis rendezés. Gondolhatnók arra is, hogy komponensenként használjuk az egydimenziós B-W-tételt. Ezzel a következő a probléma. Világos, hogy létezik minden projekciósorozatra egy-egy részsorozat, mely konvergens. Ám ebből egyáltalán nem következtethetünk arra, hogy ezek metszetéből kiválasztható részsorozat. Ellenpéldaként vegyünk egy $\mathbf{R}^2$ -ben haladó sorozatot. Tegyük fel, hogy (szerencsétlen módon) az egydimenziós B-W-tétel az első komponensek sorozatából a páros indexűeket, a második komponensek közül a páratlan indexűeket választja ki. Ekkor a kétdimenziós sorozatnak nincs olyan részsorozata, mely a komponenssorozatok közös indexeiből választható ki, tekintve, hogy a közös indexen halmaza üres.

A fentiek miatt olyan módon kell konvergens részsorozatokat kiválasztanunk, mely bizonyosan végtelen sok közös indexel rendelkeznek. A konstrukció a következő.

Bizonyítás

Legyen

$$(a_n) = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(N)}) \in (\mathbf{R}^N)^{\mathbf{Z}^+}$$

Bolzano-Weierstrass-tétel

egy N komponensű sorozat, mely korlátos $\mathbf{R}^N$ -ben. Ekkor a komponenssorozatok is korlátosak. Az egydimenziós B-W-tétel szerint az

$$(a_n^{(1)})$$

sorozathoz létezik σ_1 indexsorozat úgy, hogy az

$$(a_n^{(1)}) \circ \sigma_1$$

konvergens részsorozat. Hasonlóképpen, de a

$$(a_n^{(2)}) \circ \sigma_1$$

sorozatnak is van

$$(a_n^{(2)}) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$$

konvergens részsorozata. Megállapíthatjuk, hogy a

$$(a_n^{(1)}) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$$

sorozat szintén konvergens, mert konvergens sorozat részsorozata. Ugyanígy léteznek $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ indexsorozatok, hogy a

$$\begin{aligned} (a_n^{(1)}) &\circ \sigma_1 \\ (a_n^{(2)}) &\circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \\ &\vdots \\ (a_n^{(N)}) &\circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_N \end{aligned}$$

sorozatok mind konvergensnek és így tetszőleges $k=1\dots N$ -re

$$(a_n^{(k)}) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_N$$

is az, ami pontosan azt jelenti, hogy az

$$(a_n) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_N$$

sorozat komponensenként konvergens, azaz konvergens. A

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_N$$

tehát olyan indexsorozat, mely konvergens részsorozatot választ ki (a_n) -ből.

B-W-tétel mint a B-W-féle kiválasztási tétel következménye

Az előbbi tétel múlthatatlan fontosságú következménye az amit sokhelyütt szintén Bolzano-Weierstrass-tételnek neveznek vagyis, hogy egy $\mathbf{R}$ -beli halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha kompakt. Itt egészen pontosan *sorozatkompaktságról* van szó, azaz arról, amikor egy tetszőleges $H \subset \mathbf{R}$

Bolzano-Weierstrass-tétel

halmazra teljesül, hogy minden H -beli értékeket felvevő sorozatnak van H -beli határérték? konvergens részsorozata.

B-W-tétel ? Egy $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor korlátos és zárt, ha sorozatkompakt.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy H korlátos és zárt. Ekkor a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy minden H -ban haladó sorozatnak ? minthogy ezeket lefedi a korlátos H ? létezik konvergens részsorozata. H zártaságából pedig az következik, hogy minden H -beli értékeket felvevő konvergens sorozat határértéke szintén H -beli, amivel az állítás első fele bebizonyosodott.

Másrészt legyen H sorozatkompakt. Ha nem lenne korlátos, akkor tetszőleges n természetes számra

$$H_n := \{x \in H \mid |x| > n\} \neq \emptyset$$

lenne, és így a kiválasztási axióma segítségével definiálhatunk egy (s_n) sorozatot, melynek elemei rendre H_n -beliek. Ekkor minden n természetes számra $s_n > n$, és így tetszőleges (k_n) indexsorozatra (szig. mon. növekvő) $|s_{k_n}| > k_n > n$, ami azt jelenti, hogy (s_n) -nek nincs konvergens részsorozata.

A zártáshoz tekintsük H lezártjának egy h elemét. Ekkor létezik h határértékkel H -beli elemekből konvergens sorozat, melyből a sorozatkompaktság miatt szükségképpen $h \in H$ következik. QED

A tétel párja a Borel-Lebesgue-féle lefedési tétel, mely szerint korlátos és zárt $\mathbb{R}$ -beli halmaz minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges részlefedés (korlátos és zárt $\mathbb{R}$ -beli halmaz kompakt).

Ellenpélda végtelen dimenzióra

A tétel végtelen dimenziós esetben nem igaz. Vegyük például a korlátos valós függvények

$$B([-1, +1], \mathbb{R})$$

terében a szuprémumnormát:

$$\|f\| =_{\text{def}} \sup\{|f(x)| \mid x \in [-1, +1]\}$$

és a belőle definiálható távolságot. Ebben az esetben a páratlan gyökkitevő? gyökfüggvények

$$f_n = \sqrt[2n+1]{\cdot} \quad (f_n(x) = \sqrt[2n+1]{x})$$

sorozata nem konvergens. Ez amiatt van, hogy az itteni konvergenciafogalom ugyanaz, mint a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalma. Bár ez a függvénysorozat *pontonként* konvergál a szignumfüggvényhez, de a sorozat a szignumfüggvény minden környezetéből kilép. Emiatt még az is igaz, hogy egyetlen részsorozat sem lehet konvergens (azaz egyenletesen konvergens), holott a függvénysorozat maga korlátos (u.is. belefoglalható az azonosan 0 függvény 2 sugarú környezetébe).

Megjegyzés. A tétel azon iránya, mely a sorozatkompaktságot tételezi fel, igaz marad minden metrikus térben.

Példa alkalmazásra

A Bolzano-Weierstrass-tételt felhasználhatjuk például arra is, hogy igazoljuk, hogy $\mathbf{R}$ -ben (tehát $\mathbf{R}^N$ -ben is) minden Cauchy-sorozat konvergens.

Külső hivatkozások

- [A PlanetMath *Bolzano-Weierstrass theorem* szócikke](#)