A **Bolzano?Weierstrass-tételkör** és a hozzá kapcsolódó állítások $\mathbf{R}^n$ jellegzetes topologiai tulajdonságaira mutatnak rá. Lényegében a korlátos és zárt halmazok kompaktságáról szólnak.

Tartalomjegyzék

Sorozatkompaktság és B?W-tétel

A Bolzano?Weierstrass-tétel az úgy nevezett sorozatkompaktság fogalmával kapcsolatban kulcsfontosságú tényre mutat rá. Az említett fogalom a következ?.

Egy *K* részhalmaz **sorozatkompakt** $\mathbf{R}^N$-ben (vagy még általánosabban egy *M* metrikus térben), ha minden a *K*-ban haladó sorozatból kiválasztható *K*-beli határérték? konvergens részsorozat. Jelekben:

K sorozatkompakt
$\Leftrightarrow_{\text{def}}$
$$\forall(a_n) \in K^{\mathbf{Z}^+}\ \ \exists(n_k) \in (\mathbf{Z}^+)^{\mathbf{Z}^+}\quad (n_k)\ \text{indexsorozat}\ \ \land\ \ \exists \lim(a_{n_k}) \in K$$

A konvergens részsorozatra vonatkozó tétel $\mathbf{R}^N$-ben:

BOLZANO?WEIERSTRASS-FÉLE KIVÁLASZTÁSI TÉTEL. Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítását külön nézzük az egy és a többváltozós esetre.

Kompakt halmazok és H?B-tétel

A metrikus terek analízisének egyik jelent? eredménye, hogy a sorozatkompaktság és a topologikus kompaktság fogalma egybeeseik. Alább a topologikus kompaktságal és az ?zt motiváló tétellel, a Heine?Borel-tétellel (vagy más elnevezéssel Borel?Lebesgue-tétellel) foglalkozunk.

Kompakt egy *K* halmaz, ha minden nyílt halmazrendszerb?l, melynek uniója lefedi *K*-t kiválasztható véges sok nyílt halmaz is, melyek véges uniója még mindig lefedi *K*-t.

HEINE?BOREL-TÉTEL. $\mathbf{R}^N$-ben korlátos és zárt halmaz kompakt.

Cantor-tétellel

A Cantor-féle közösrész tétel egy ekvivalens megfogalmazását fogjuk használni. Eszerint, ha $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ **R**-beli korlátos és zárt halmazok olyan nemüres rendszere, hogy minden , *A* indexre létezik olyan *A* index, hogy F F F</sub> </sub> (azaz lefelé irányított), akkor az $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ halmazrendszer metszete nem üres.

Jelölje *A* az *I* véges részhalmazainak halmazát és legyen tetsz?leges *A*-ra:

$$F_\alpha := K \setminus \bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i$$

Ekkor a $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ halmazrendszer olyan, hogy minden eleme korlátos és zárt **R**-ben és tetsz?leges ,
A-ra a := U elem olyan, hogy F F F</sub> </sub>. A tételt azt igazolná, ha belátnánk, hogy van olyan *A*, hogy F ≠ , ugyanis ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{i\in\alpha} \Omega_i$$

teljesülne.

Ha $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ minden eleme nemüres volna, akkor a Cantor-axióma fenti alakjából következne, hogy

$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset$$

ami ellentmondás, hiszen $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ definíciójából és a halmazkivonásra vonatkozó de-Morgan-szabályból következik, hogy

$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = K \setminus \bigcup_{\alpha\in A}\left(\bigcup_{i\in\alpha}\Omega_i\right) = K \setminus \bigcup_{i\in I}\Omega_i = \emptyset$$

Tehát van $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$-nak olyan eleme, mely üres, és az ezt indexez? *A*-val a $(\Omega_i)_{i\in\alpha}$ a kívánt tulajdonságú lefedés lesz.

Bolzano?Weierstrass-tétellel

Mivel **R** teljesíti a második megszámlálhatósági kritéruimot, azaz van megszámlálható környezetbázisa (például a racionális végpontú nyílt intervallumok ilyet alkotnak), a *K* korlátos és zárt halmazt lefed? rendszerb?l kiválasztható megszámlálható részlefedés. Legyen ez ($_i)_{i=1}$. Definiálunk egy *K*-ban haladó (x_n) sorozatot. Ha $_1$ lefedi *K*-t, akkor megtaláltuk a véges részlefedést. Ha $_1$ nem fedi le *K*-t, legyen x_1 $K \setminus$ $_1$. Ha $_1$ $_2$ már lefedi *K*-t, akkor szintén megtaláltuk a véges részlefedést. Ha nem, legyen x_2 $K \setminus$ ($_1$ $_2$). Így folytatva biztos lesz olyan *n*, hogy ($_i)_{i=1}^n$ már lefedi *K*-t. Tegyük fel ugyanis, hogy nem fedné le. Akkor (x_n) egy végtelen, *K*-ban haladó sorozat lenne, aminek a Bolzano?Weierstrass-tétel szerint lenne *u* *K* s?r?södési pontja. Mivel ($_i)_{i=1}$ lefedi *K*-t ezért *u*-t is tartalmazza egy $_m$ nyílt halmaz. *u*-nak van $_m$-be es? nyílt környezete, és ebben a környezetben végtelen sok (x_n)-beli tag. (x_n) konstrukciója szerint minden *n*-re ($_i)_{i=1}^n$-ben csak véges sok tag lehet. Ez azonban ellentmond annak, hogy már magában $_m$-ben is végtelen sok tag van.

Tehát a véges nyílt lefedés kiválasztásának fenti konstrukciója véges sok lépésben véget ér (bár, hogy mi lesz ez a szám, el?re nem tudjuk megmondani sehogyan sem; s?t, már magát ($_i)_{i=1}$ sem fogjuk tudni megadni konstruktívan, kézzelfogaható módon).

Kapcsolatok

R^n-ben tehát a kompaktság ugyanaz, mint a sorozatkompaktság.

R^n véges dimenziószáma nagyon lényegesen hozzájárul a fenti tételek fennállásához. Általában (Haussdorf-térben) kompakt halmaz korlátos és zárt. Ám, van olyan végtelen dimenziós normált tér, melyben zárt és korlátos halmaz nem kompakt. Legyen ugyanis $\ell_\infty(\mathbf{R})$ a korlátos sorozatok tere. A téren a norma a suprémum:

$$||s||_\infty = \sup\{|s_n| \mid n \in \mathbf{N}\}$$

Ekkor a

$$H := \{s \in \ell^\infty(\mathbf{R}) \mid ||s|| \leq 1\}$$

"http://wiki.math.bme.hugömb"http://wiki.math.bme.hu nem kompakt. Hasonló furcsaságokat jelentkeznek a p-edik hatványon szummálható sorozatok $\ell_p(\mathbf{R})$ terében is. Számunkra esetleg a véges sorösszeggel rendelkez? $\ell_1(\mathbf{R})$ tér bír jelent?séggel.