

A **Borel-Lebesgue lefedési tétel** vagy **Heine-Borel-tétel** a matematikai analízis egy a zárt, korlátos intervallumok lényeges tulajdonságára rámutató tétel. Általánosítása érvényes $\mathbf{R}^n$ -ben is, továbbá a topologikus terek elméletében a kompakt halmaz fogalmának motivációjául szolgál.

Tartalomjegyzék

- 1 A tétel
- 2 Bizonyítás
 - ♦ 2.1
Cantor-tétellel
 - ♦ 2.2
Bolzano-Weierstrass-tétellel
- 3 A tétel megfordítása
- 4 Külső hivatkozások

A tétel

Tétel (Dirichlet 1862, Heine 1872) Ha $K \subset \mathbf{R}$ korlátos és zárt halmaz és K -nak $(\Omega_i)_{i \in I}$ nyílt lefedése, akkor ebből kiválasztható *véges* sok elem, mely még mindig lefedi K -t.

(A K nyílt lefedésén olyan nyílt halmazokból álló $(\Omega_i)_{i \in I}$ halmazrendszert értünk, amire teljesül, hogy K részhalmaza $(\Omega_i)_{i \in I}$ uniójának.)

Bizonyítás

Cantor-tétellel

A Cantor-féle közsérész tétel egy ekvivalens megfogalmazását fogjuk használni. Eszerint, ha $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ $\mathbf{R}$ -beli korlátos és zárt halmazok olyan nemüres rendszere, hogy minden $\alpha \in A$ indexre létezik olyan $\beta \in A$ index, hogy $F_\beta \subset F_\alpha$ (azaz lefelé irányított), akkor az $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ halmazrendszer metszete nem üres.

Jelölje A az I véges részhalmazainak halmazát és legyen tetszőleges $\alpha \in A$ -ra:

$$F_\alpha := K \setminus \bigcup_{i \in \alpha} \Omega_i$$

Ekkor a $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ halmazrendszer olyan, hogy minden eleme korlátos és zárt $\mathbf{R}$ -ben és tetszőleges $\alpha \in A$ -ra a $\beta := \alpha \cup \{\alpha\}$ elem olyan, hogy $F_\beta \subset F_\alpha$. A tételt azt igazolná, ha belátnánk, hogy van olyan $\alpha \in A$, hogy $F_\alpha \neq \emptyset$, ugyanis ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{i \in \alpha} \Omega_i$$

teljesülne.

Ha $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ minden eleme nemüres volna, akkor a Cantor-axióma fenti alakjából következne, hogy

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$$

Borel-Lebesgue-tétel

ami ellentmondás, hiszen $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ definíciójából és a halmazkivonásra vonatkozó de-Morgan-szabályból következik, hogy

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = K \setminus \bigcup_{\alpha \in A} \left(\bigcup_{i \in \alpha} \Omega_i \right) = K \setminus \bigcup_{i \in I} \Omega_i = \emptyset$$

Tehát van $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ -nak olyan eleme, mely üres, és az ezt indexez A -val a $(\Omega_i)_{i \in \alpha}$ a kívánt tulajdonságú lefedés lesz. ?

Bolzano-Weierstrass-tétellel

Mivel $\mathbf{R}$ teljesíti a második megszámlálhatósági kritériumot, azaz van megszámlálható környezetbázisa (például a racionális végpontú nyílt intervallumok ilyen alkotnak), a K korlátos és zárt halmazt lefed? rendszerb?l kiválasztható megszámlálható részlefedés. Legyen ez $(\cdot)_{i=1}^n$. Definálunk egy K -ban haladó (x_n) sorozatot. Ha $\cdot_1$ lefed K -t, akkor megtaláltuk a véges részlefedést. Ha $\cdot_1$ nem fed le K -t, legyen $x_1 \in K \setminus \cdot_1$. Ha $\cdot_1 \cup \cdot_2$ már lefed K -t, akkor szintén megtaláltuk a véges részlefedést. Ha nem, legyen $x_2 \in K \setminus (\cdot_1 \cup \cdot_2)$. Így folytatva biztos lesz olyan n , hogy $(\cdot)_{i=1}^n$ már lefed K -t. Tegyük fel ugyanis, hogy nem fedné le. Akkor (x_n) egy végtelen, K -ban haladó sorozat lenne, aminek a Bolzano-Weierstrass-tétel szerint lenne $u \in K$ s?r?södési pontja. Mivel $(\cdot)_{i=1}^n$ lefed K -t ezért u -t is tartalmazza egy $\cdot_m$ nyílt halmaz. u -nak van $\cdot_m$ -be es? nyílt környezete, és ebben a környezetben végtelen sok (x_n) -beli tag. (x_n) konstrukciója szerint minden n -re $(\cdot)_{i=1}^n$ -ben csak véges sok tag lehet. Ez azonban ellentmond annak, hogy már magában $\cdot_m$ -ben is végtelen sok tag van.

Tehát a véges nyílt lefedés kiválasztásának fenti konstrukciója véges sok lépésben véget ér (bár, hogy mi lesz ez a szám, el?re nem tudjuk megmondani sehogyan sem; s?t, már magát $(\cdot)_{i=1}^n$ sem fogjuk tudni megadni konstruktívan, kézzelfogható módon).

A tétel megfordítása

A lefedési tulajdonság motiválja a kompakt halmaz fogalmát. A $K \subseteq \mathbf{R}$ halmaz kompakt, ha minden nyílt lefedéséb?l kiválasztható véges részlefedés. Ekkor a Borel-Lebesgue-tétel megfordítása érvényes:

Tétel $\mathbf{R}$ -ben minden kompakt halmaz korlátos és zárt.

Bizonyítás. Legyen K kompakt halmaz.

El?ször a korlátosságot látjuk be. Legyen u tets?leges $\mathbf{R}$ -beli pont. Ekkor világos, hogy a $(B(u, n))_{n \in \mathbf{N}}$ rendszer lefed K -t. Ebb?l kiválasztható *véges* részlefedés, melyek közül a legnagyobb sugarú lefed K -t, így K átmér?je legfeljebb ennek a sugarúknak a kétszerese.

Vegyünk egy tets?leges x pontot K komplementeréb?l ($x \notin K$). A

$$\left(B\left(y, \frac{d(y, x)}{2}\right) \right)_{y \in K}$$

rendszer lefed K -t így létezik n darab $y_1, \dots, y_n$ K -beli elem, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, n} B\left(y_i, \frac{d(y_i, x)}{2}\right)$$

Borel-Lebesgue-tétel

Ha r a legkisebb sugár mindközül, akkor a $B(x,r)$ halmaz nem metsz bele az iménti lefedés egyik elemébe sem, így K -ba sem. Tehát K komplementere nyílt, K pedig zárt.

Külső hivatkozások

- [A PlanetMath *Heine-Borel theorem* szócikke](#)
- [Animáció](#)