

A **dimenziótétel** a lineáris leképezések magterének és képterének dimenziója közötti szoros (komplementer jelleg?) kapcsolatra mutat rá. Azt állítja, hogy ha $\mathbf{A}: V \rightarrow U$ lineáris leképezés, ahol V véges dimenziós vektortér, U pedig tetszőleges vektortér, akkor

$$\dim \text{Ker}(\mathbf{A}) + \dim \text{Im}(\mathbf{A}) = \dim(V)$$

Tartalomjegyzék

- 1 Magtér és Képtér
 - ♦ 1.1 Magtér
 - ♦ 1.2 Képtér
- 2 Bizonyítás
 - ♦ 2.1 Megjegyzés

Magtér és Képtér

Magtér

Az $\mathbf{A}: V \rightarrow U$ lineáris leképezés magtere:

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) =_{\text{def}} \{v \in V \mid \mathbf{A}v = 0\}$$

világos, hogy ez altér. Ugyanis altér jelezhető úgy, mint olyan részhalmaz a térben, mely zárt az összeadásra és a skalárral történő szorzásra. De $\text{Ker}(\mathbf{A})$ ilyen, mert *tetszőleges* u, v vektorra

$$\mathbf{A}v = 0 \wedge \mathbf{A}u = 0 \Rightarrow \mathbf{A}v + \mathbf{A}u = 0 \Rightarrow \mathbf{A}(v + u) = 0$$

és

$$\mathbf{A}v = 0 \Rightarrow \lambda.(\mathbf{A}v) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}(\lambda.v) = 0$$

A speciális $V = \mathbf{R}^n$, $U = \mathbf{R}^m$ esetben például bázist az $\mathbf{A}$ leképezés $[\mathbf{A}]$ mátrixának Gauss-eliminációjával és az $[\mathbf{A}]x=0$ homogén egyenletrendszer megoldásával nyerhetünk (példa itt).

Képtér

Az $\mathbf{A}: V \rightarrow U$ lineáris leképezés képtere:

$$\text{Im}(\mathbf{A}) =_{\text{def}} \{\mathbf{A}v \in U \mid v \in V\}$$

világos, hogy ez altér. Ugyanis *alkalmas* v és u vektorokkal:

$$\mathbf{A}v + \mathbf{A}u = \mathbf{A}(v + u)$$

és

$$\lambda.(\mathbf{A}v) = \mathbf{A}(\lambda.v)$$

A speciális $V = \mathbf{R}^n$, $U = \mathbf{R}^m$, esetben például úgy nyerünk bázist, hogy a $\mathbf{A}$ leképezés $[\mathbf{A}]$ mátrixának oszlopvektorai közül Gauss-eliminációval kiválasztjuk a legtöbb vektort tartalmazó lineárisan független rendszert (példa [itt](#)).

Bizonyítás

Ha vesszük $\text{Ker}(\mathbf{A})$ egy

$$B = \{b_1, \dots, b_k\}$$

bázisát ($\text{Ker}(\mathbf{A})$ dimenziója tehát k) akkor világos, hogy a báziselemek képei által kifeszített

$$\langle \mathbf{A}b_1, \mathbf{A}b_2, \dots, \mathbf{A}b_k \rangle$$

altér az U -beli triviális $\{0\}$ altér. Világos, hogy ha veszünk egy $\text{Ker}(\mathbf{A})$ -n kívüli c vektort, akkor ez már nem képezhető a $\{0\}$ -ba. Megfogalmazhatjuk tehát azt a sejtést, hogy ha B -t kibővítjük V bázisává, mondjuk a

$$C = \{c_1, \dots, c_l\}$$

független vektorrendszerrel, akkor C elemeinek képei $\text{Im}(\mathbf{A})$ bázisát fogja adni. Ezt fogjuk igazolni, azaz hogy

$$\langle \mathbf{A}c_1, \mathbf{A}c_2, \dots, \mathbf{A}c_l \rangle = \text{Im}(\mathbf{A})$$

és ami a tétel állítását igazolja: $\text{Im}(\mathbf{A})$ dimenziója pont l .

1. Először belátjuk, hogy $\{ \mathbf{A}c_1, \mathbf{A}c_2, \dots, \mathbf{A}c_l \}$ generátorrendszere $\text{Im}(\mathbf{A})$ -nak. Legyen

$$v = \mathbf{A}u$$

Mivel $B + C$ bázisa V -nek, ezért u előáll (egyértelmű módon)

$$u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k + \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \dots + \mu_l c_l$$

alakban. De u képeben a B -beliekkel előállíthatók a $\{0\}$ -ba mennek, így már a C -ből jövő képek is előállítják $\mathbf{A}u$ -t:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}u &= \mathbf{A}(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k) + \mathbf{A}(\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \dots + \mu_l c_l) = \\ &= 0 + \mathbf{A}(\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \dots + \mu_l c_l) \\ &= \mu_1 \mathbf{A}c_1 + \mu_2 \mathbf{A}c_2 + \dots + \mu_l \mathbf{A}c_l \end{aligned}$$

2. Belátjuk, hogy $\{ \mathbf{A}c_1, \mathbf{A}c_2, \dots, \mathbf{A}c_l \}$ független vektorrendszer is, tehát dimenziója l .

Tegyük fel, hogy vannak $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$ számok, melyekkel

$$\nu_1 \mathbf{A}c_1 + \nu_2 \mathbf{A}c_2 + \dots + \nu_l \mathbf{A}c_l = 0$$

A függetlenséghez az kell, hogy $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$ -k mind nullák legyenek. Természetesen a bal oldalon kiemelhetünk $\mathbf{A}$ -t, tehát:

$$\mathbf{A}(\nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \dots + \nu_l c_l) = 0$$

Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy ha az

$$u = \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \dots + \nu_l c_l$$

rövidítéshez folyamodunk, akkor

$$u \in \text{Ker}(\mathbf{A})$$

azaz az u vektor B -beli elemekkel is és C -beli elemekkel is előállítható. De ez csak úgy lehet, hogy $u=0$, ami pedig csak akkor van, ha a $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$ számok mind nullák.

Mindez azt jelenti, hogy $\{\mathbf{A}c_1, \mathbf{A}c_2, \dots, \mathbf{A}c_l\}$ bázis, amiből következik, hogy az általa kifeszített altér dimenziója l . De a kifeszített altér pont $\text{Im}(\mathbf{A})$, így azt kaptuk, hogy

$$\dim(\text{Im}(\mathbf{A})) = n - k$$

vagyis, amit be akartunk látni.

Megjegyzés

Világos, hogy a fenti bizonyításban a B által generált altér és a C által generált altér közös része a $\{0\}$ (vagyis csak a 0-t állítják elő mindeketten). Ugyanis, ha lenne $v \neq 0$, hogy

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k c_k$$

és közben

$$v = \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \dots + \mu_k c_k$$

akkor mindkét egyenletben a skalárok között lenne nemnulla, és a két egyenletet kivonva egymásból kapnánk, hogy a 0 vektor előáll olyan B és C -beli elemek lineáris kombinációjaként, ahol az együtthatók között van nemnulla. Ez viszont az jelentené, hogy $B \cup C$ nem független rendszer (holott $B \cup C$ a B egy kibővítése a V bázisává).

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a V vektorteret előállítottuk a B által kifeszített és a C által kifeszített alterek **direkt összegeként**:

$$V = \langle B \rangle \oplus \langle C \rangle$$