

Hesse-mátrix

A matematikában, közelebbre?l a matematikai analízisben **Hesse-féle mátrix**nak egy többváltozós valós függvény másodrendű parciális deriváltjaiból alkotott négyzetes mátrixát nevezzük. [Lang]

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad n \text{ változós függvény Hesse-mátrixa}$$

Legyen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

n -változós valós függvény. Ha mindegyik másodrendű parciális deriváltja létezik az f értelmezés tartományának egy x belső pontjában, akkor a *Hesse-mátrix* mátrixelemei a

$$[\mathbf{H}^f(x)]_{ij} = \partial_{ij}^2 f(x)$$

számok, ahol $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, i, j tetszőleges számok 1-től n -ig, ∂_{ij} pedig a másodrendű parciális deriválás jele.

A Hesse-féle mátrix determinánsa a *Hesse-determináns*. A Hesse-determináns elnevezést először James Joseph Sylvester használta, Ludwig Otto Hesse tiszteletére, aki először vezette be és függvénydeterminánsnak nevezte. [Mill]

Tartalomjegyzék

- 1 Hesse-mátrix szimmetrikussága
- 2 A Hesse-mátrix mint a deriválttenzor mátrixa
- 3 Stacionárius pont és szélsőérték létezése
 - ◆ 3.1 Kétváltozós függvény szélsőértékei
 - ◆ 3.2 Példák
 - ◇ 3.2.1 Definit eset
 - ◇ 3.2.2 Indefinit eset
 - ◇ 3.2.3 Szemidefinit eset
- 4 Implicit módon megadott görbe szinguláris pontjai
- 5 Feltételes szélsőértékprobléma Hesse-mátrixa
- 6 Külső hivatkozások

Hesse-mátrix szimmetrikussága

A Hesse-mátrix főátlóján kívüli elemei a vegyes másodrendű parciális deriváltak. Young tétele értelmében ha az f függvény az u pont egy környezetében mindenütt kétszer parciálisan differenciálható és az u pontban a második deriváltak folytonosak, akkor a parciális deriválás nem függ a deriválás sorrendjétől, azaz a vegyes deriváltak egyenlők. Ez pontosan azt jelenti, hogy a Hesse-mátrix szimmetrikus. Például kétváltozós f függvényénél (u -ban f kétszer folytonosan differenciálható)

$$[\mathbf{H}^f(u)]_{21} = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x \partial y} = [\mathbf{H}^f(u)]_{12}$$

A Hesse-mátrix mint a deriválttenzor mátrixa

Ha az f függvény az U halmazon értelmezett n -változós valós függvény és az U halmazon létezik az f gradiense, és a $\text{grad}(f) : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ leképezés totálisan differenciálható az $u \in U$ pontban, akkor a gradiensfüggvény differenciáljának mátrixa a sztenderd bázisra vonatkozólag éppen a Hesse-mátrix:

$$[d(\text{grad } f)(u)] = \mathbf{H}^f(u)$$

A $d(\text{grad } f)(u)$ tenzor tekinthető úgy, mint az f másodrendű differenciálja az u -ban és teljesül rá, hogy minden $x \in U$ -ra:

$$f(x) = f(u) + \text{grad } f(u) \cdot (x - u) + \frac{1}{2}(x - u) \mathbf{H}^f(u)(x - u) + \varepsilon(x) \|x - u\|^2$$

ahol ε folytonos u -ban és ott eltérő zérőtől.

Stacionárius pont és szélsőérték létezése

Ha a többváltozós valós f kétszer folytonosan differenciálható, akkor az értelmezési tartományának u pontját **stacionárius pont**nak nevezzük, ha

$$\text{grad } f(u) = 0$$

ha a Hesse-determináns u -ban nulla, akkor ez degenerált kritikus pont.

A Hesse-mátrix segítségével megfogalmazható a többváltozós valós értékű függvények **másodikderivált-próbája**. Tegyük fel, hogy az u pontban az f -nek stacionárius pontja és legyen

$$Q_u^f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \mathbf{H}^f(u) \mathbf{v}$$

a $\mathbf{H}^f(u)$ -hoz asszociált kvadratikusan leképezés.

Ha a $Q_u^f(\mathbf{v})$ kifejezés pozitív minden nemnulla $\mathbf{v}$ vektorra, azaz ha Q_u^f pozitív definit, akkor f -nek u -ban *lokális minimuma* van. Ez a tulajdonság Sylvester tétele alapján azt jelenti, hogy $\mathbf{H}^f(u)$ mátrixának bal felső kvadratikusan al-determinánsai csupa pozitív értékeket felvevő sorozatot alkot:

$$\partial_{11} f(u) > 0, \quad \det_{1 \leq i, j \leq 2} [\partial_{ij} f(u)] > 0, \quad \dots \quad \det \mathbf{H}^f(u) > 0$$

Hesse-mátrix

Ha a $Q_u^f(\mathbf{v})$ kifejezés negatív minden nemnulla $\mathbf{v}$ vektorra, azaz ha Q_u^f negatív definit, akkor f -nek u -ban *lokális maximuma* van. Ekkor az aldeterminánsok eljelváltóak:

$$\partial_{11}f(u) < 0, \quad \det_{1 \leq i,j \leq 2} [\partial_{ij}f(u)] > 0, \quad \det_{1 \leq i,j \leq 3} [\partial_{ij}f(u)] < 0, \quad \dots \quad \det H^f(u) < (>)0$$

Indefinit esetben vagyis amikor Q felvesz pozitív és negatív értékeket is, a próba állítása szerint biztosan nincs szélsőérték. Szemidefinit esetben, amikor van olyan nemnulla $\mathbf{v}$, amire $Q_u^f(\mathbf{v})=0$, a próba nem jár sikerrel.

Lásd: [Kris]

Kétváltozós függvény szélsőértékei

Speciálisan kétváltozós függvények esetén a próba konkrétan a következők ellenőrzését jelenti:

1. ha $\det H^f(u) > 0$ és $\partial_{11}f(u) > 0$, akkor u -ban **lokális minimum** van,
 2. ha $\det H^f(u) > 0$ és $\partial_{11}f(u) < 0$, akkor u -ban **lokális maximum** van,
 3. ha $\det H^f(u) < 0$, akkor u **nincs lokális szélsőérték** (valamilyen típusú nyeregpontról beszélünk)
 4. ha $\det H^f(u) = 0$, akkor a próba nem járt sikerrel.
- József, *Matematikai analízis* 205. o., Ed. Dacia, Cluj-Napoca 1979.

Megjegyzés. Ha a Hesse-mátrix elemei

$$H^f(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

akkor a Hesse-determinánsa $D = AC - B^2$ és így olyan eset nincs, hogy $\partial_{11}f(u) = 0$ lenne, miközben $D > 0$.

Példák

Definit eset

Legyen

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

Ekkor $\text{grad } f = (2x + y, 2y + x)$, vagyis az első derivált próba szerint a

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ 2y + x &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai közül kerülhetnek ki a szélsőértékek. A megoldás: $(x, y) = (0, 0)$.

A második parciális deriváltakat kiszámítva, a Hesse-mátrix minden pontban

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hesse-mátrix

azaz $\det H^f = 4 - 1 = 3 > 0$ és $\partial_{11}f = 2 > 0$ miatt $(0,0)$ szélsőérték hely és minimum pont.

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot $x*x+x*y+y*y$

Indefinit eset

Legyen

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$

Ekkor $\text{grad } f = (2x + y, -2y + x)$, melynek zérushelye a $(0,0)$ pont.

A Hesse-mátrix minden pontban

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

innen $\det H^f = -4 - 1 = -5 < 0$, így a próba megint sikeres, és pedig állíthatjuk, hogy $(0,0)$ biztosan nem szélsőérték hely. Ebben a pontban a függvények úgy nevezett nemdegenerált nyeregpontra van. Egy stacionárius pont nem degenerált, ha abban a pontban a Hesse-féle detremináns nem nulla érték?

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

splot $x*x+x*y-y*y$

Szemidefinit eset

Legyen

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$

Definit eset

Hesse-mátrix

Ekkor $\text{grad } f = (2x + 2y, 2y + 2x)$, így a gradiens zérushelye minden olyan (x, y) pont, amire $x = -y$. Ezekben a pontokban a Hesse-mátrix:

$$H^f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz $\det H^f = 4 - 4 = 0$, azaz a próba nem járt sikerrel. De tudjuk, hogy

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

ami pontosan akkor minimális, ha $x + y = 0$, és ezeken a helyeken valóban szélsőértéke van mert itt a függvény a lehető legkisebb, azaz 0 értéket vesz föl.

```
set pm3d

set size 0.8,0.8
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set zrange [-2:2]
set view 50,30,1,1
unset xtics
unset ytics
unset ztics
unset key
unset colorbox
```

```
splot x*x+2*x*y+y*y
```

Implicit módon megadott görbe szinguláris pontjai

Azt mondjuk, hogy az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlet megadott görbének szinguláris pontja az (x_0, y_0) pont, ha ebben a pontban az F függvénynek nincs intervallumon értelmezett differenciálható implicit függvénye egyik változóra vonatkozólag sem (azaz egyik változó sem fejezhető ki lokálisan a másikkal). Szinguláris pont szükséges feltétele az

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \partial_1 F(x_0, y_0) = 0, \quad \partial_2 F(x_0, y_0) = 0$$

egyenletek egyidejű fennállása.

Ha F kétszer folytonosan differenciálható függvény és az origóra a fenti egyenlőségek teljesülnek, akkor az F függvény $(0,0)$ -beli Hesse-determinánsa vizsgálatával a görbe néhány jellegzetes vonására következtethetünk. Lásd: [\[Berm\]](#)

Az F -et másodrendben közelít? kvadratikus leképezés számára a $D = AC - B^2$ Hesse-determináns ellentettje egyfajta diszkriminánsként működik. Három eset lehet. $D < 0$ esetén a kvadratikus leképezéshez nincs olyan irány, amely mentén az mindenhol nulla lenne. $D = 0$ esetén egy ilyen irány van, $D > 0$ esetén két különböző ilyen irány van.

1. Ha $\det H^F(0,0) > 0$, akkor $(0,0)$ izolált pontja a görbének (pl.: $(x^2 + y^2)(1 - y) = 0$ az origóban). Ez azzal indokolható, hogy ekkor az F leképezésnek $(0,0)$ -ban *szigorú lokális szélsőértéke* van, így

Hesse-mátrix

- annak egy környezetében az F függvény az $(0,0)$ -t kivéve sehol sem nulla. Így az $(0,0)$ -beli implicit függvény egyedül az egyenlet $\{x_0\}$ halmazon értelmezett $y(x_0) = y_0$ függvény.
- Ha $\det H^F(0,0) < 0$, akkor $(0,0)$ -ban a görbe átmetszi? (pl.: az $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ Descartes-féle levélnél). Hiszen ekkor a $(0,0)$ pont nyeregpont, így a felület biztosan legalább két különböző irányban átmetszi az $[xy]$ síkot.
 - Ha $\det H^F(0,0) = 0$, akkor a görbe számos módon viselkedhet; az egyik például, hogy saját magával érintkezik első rendben, azaz két ágának ugyanaz az érintő egyenese (pl.: $x^2 - y^4 = 0$). De átmetszi? is lehet, például az $x^2 y^2 = 0$ egyenletnél.

Feltételes szélsőértékprobléma Hesse-mátrixa

Ha az

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

függvény

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c,$$

korlátozásnak alávetett megszorításának szélsőértékeit keressük, akkor ezt az

$$f + \lambda(g - c)$$

függvény szabad szélsőértékeinél kell keresnünk. Ha elégségességi vizsgálatokat is szándékozunk végezni, akkor felírhatjuk az $f + \lambda(g - c)$ feladat Hesse-mátrixát, a λ új változóval kiegészítve:

$$H^{f+\lambda g}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} & 0 \end{bmatrix}$$

Világos, hogy ez a mátrix soha sem lesz definit, mert a $(0,0,\dots,1)$ nemnulla vektoron a $z \mapsto z'H^F z$ leképezés a 0-t veszi föl. Ám ha már az $n \times n$ -es bal felső blokk definit, akkor már kijelenthetjük, hogy szigorú, lokális szélsőértékről beszélhetünk (pozitív definit esetben minimumról, negatív esetben maximumról).

Ez amiatt van, hogy a $z'H^F z$ kvadratikusan leképezést a feltételi egyenletnek megfelelő alakban kell felírni, azaz ha $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ tetszőleges vektorok, akkor a

$$z'H^F z$$

kvadratikusan alakot a feltételi egyenlet differenciálásával addódó

Hesse-mátrix

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} z_2 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} z_n = 0$$

egyenletben szereplő valamely alkalmas változót kell kifejezni a többi függvényében és az így adódó $z'H_z$ kvadratikus leképezést kell tovább vizsgálni.

Külső hivatkozások

- [PlanetMath] [Hessian matrix a PlanetMath lapon](#)
- [Lang] Serge Lang, *Undergraduate calculus* p 486, Springer 2nd ed 1997
- [Mill] Jeff Miller & all [Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics](#)
- [Kris] Kristóf János, *Az analízis elemei. II.* ELTE jegyzet. 175. o. [pdf](#)
- [Berm] A. F. Bermant, *Matematikai analízis II.*, Tankönyvkiadó, Bp. 1951., 93. o.,