

A **komplex számok teste**, mint kétdimenziós valós test feletti vektortér első megközelítésben vizsgálható a **valós analízis eszközeivel**. A komplex szorzás művelete miatt azonban olyan jellegzetességek és sajátosságok tapasztalhatók ebben a vektortérben, melyek nagy mértékben indokolják a kimondottan komplex analitikus fogalmak létét.

Tartalomjegyzék

- 1 Topologikus fogalmak
 - ♦ 1.1 Összeadás
 - ♦ 1.2 Szorzás
 - ♦ 1.3 Multiplikatív inverz
- 2 R- és C-linearitás
- 3 Normált algebra

Topologikus fogalmak

A $\mathbb{C}$ testen, mint az $\mathbb{R}^2$ vektortérbeli $(a, b) = a + bi$ és $(c, d) = c + di$ elemei a

$$(a + bi) \cdot (c + di) =_{\text{def}} (ac - bd) + (ad + bc)i$$

szorzásával ellátott testen értelmes topológiát alkot, az $\mathbb{R}^2$

$$\|(x, y)\|_p := (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$$

normája által generált topológiája. Speciálisan $p = 2$ -re az euklideszi topológiát, a

$$|(x, y)| := \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$

norma topológiáját kapjuk. (Természetesen teljesen mindegy, hogy melyik normát vesszük $\mathbb{R}^2$ -ben, mert mindegyik ugyanazokat a nyílt halmazokat határozza meg).

Azt, hogy értelmes ezt a normát, illetve topológiát bevezetni $\mathbb{C}$ -n az indokolja, hogy $\mathbb{C}$ mindkét művelete folytonos ezekben a normákban.

Összeadás

Rögzített $a + bi$ komplex számra az

$$(a, b) + \cdot : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} a + x \\ b + y \end{pmatrix}$$

leképezés valós affin leképezés, így nemcsak folytonos, de totálisan differenciálható és Jacobi-mátrixa az egységmátrix (differenciálja pedig az identitás leképezés). Emiatt még valós analitikus is, hiszen az $a + x$ és $b + y$ függvények triviális hatványsorok.

Az, hogy ez a függvény folytonos amellet, hogy lineáris, geometriai indokokkal is megokolható, hiszen a $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eltolás egy z pontot egy $z + z_0$ pontba viszi, és a z körüli gömböt ugyanolyansugarú $z + z_0$ körüli gömbbe képezi le. Világos, hogy ekkor a távolságtartás miatt folytonos lesz a függvény (= lesz a definícióval történ? igazoláskor).

Természetesen a $(z, w) \mapsto z + w$ leképezés is folytonos lesz, az $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ szorzattér és a $\mathbb{R}^2$ tér topológiája szerint. (S?t valós analitikus.)

Szorzás

Rögzített $a + bi$ komplex számra az

$$(a, b) \cdot \cdot : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

szorzás szintén folytonos, s?t totálisan differenciálható (s?t valós analitikus) leképezés, hiszen $\mathbb{R}$ -lineáris és Jacobi-mátrixa:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Megjegyzend?, hogy a komplex számok mártixreprezentációja pontosan ilyen alakú mártixok halmazaként definiálja $\mathbb{C}$ -t (persze a és b valósak), ahol a szorzás a mártixszorzás. Ez a fenti Jacobi-mátrixból is jól látható, hisz lineáris leképezések differenciálja pont ugyanaza leképezés, így két ilyen kompozíciójának a szorzata egyenl? a differenciáljaik szorzatával.

Továbbá szintén geometriai indokokkal, a szorzás forgatva nyújtás, így a gömböt egy elforgatott és megnyújtott gömbbé változtatja át, ami esetén az $-$ -hoz a a a nyújtási ráányból visszaszámolva nyerhet?.

A szorzás $\mathbb{C}$ -linerális is, hiszen maga a $\mathbb{C}$ -lineris $\mathbb{C}$ -skalárral szorzás.

Multiplikatív inverz

A nemnullvektorok halmazán értelmezett

$$(\cdot)^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

leképezés szintén folytonos, s?t differenciálható (hiszen olyanokból van azt meg?rz? módon összetéve).

$\mathbb{R}$ - és $\mathbb{C}$ -linearitás

Az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$a + bi \mapsto c + di$$

leképezés definíció szerint $\mathbb{R}$ -lineáris, ha mint $\mathbb{R}^2$ -b?l $\mathbb{R}^2$ -be men? függvény, azaz

$$(a,b) \mapsto (c,d)$$

lineáris a valós számok teste felett. Az $\mathbf{R}$ -lineáris függvények általános alakja, mint kétváltozós függvény nyilván:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ahol A mátrixelemei valós számok. Komplex alakba írva:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{11}\operatorname{Re}(z) + a_{12}\operatorname{Im}(z) + i(a_{21}\operatorname{Re}(z) + a_{22}\operatorname{Im}(z)) = \\ &= (a_{11} + ia_{21})\operatorname{Re}(z) + (a_{11} + ia_{22})\operatorname{Im}(z) = \\ &= (a_{11} + ia_{21})\frac{z + \bar{z}}{2} + (a_{12} + ia_{22})(-i)\frac{z - \bar{z}}{2} = \\ &= (a_{11} + ia_{21})\frac{z + \bar{z}}{2} + (a_{22} - a_{12}i)\frac{z - \bar{z}}{2} = \\ &= w_1 z + w_2 \bar{z} \end{aligned}$$

ahol $w_1 = (a_{11} + a_{22})/2 + i(a_{21} - a_{12})/2$ és $w_2 = (a_{11} - a_{22})/2 + i(a_{21} + a_{12})/2$, azaz tetszőlegesen választható komplex számok.

Világos, hogy csak a $w_1 z$ tag $\mathbf{C}$ -lineáris is egyben, a második nem. Tehát kimondhatjuk:

Egy $f(z)$ $\mathbf{R}$ -lineáris leképezés akkor és csak akkor $\mathbf{C}$ lineáris, ha az f $\mathbf{R}$ -lineárist reprezentáló A mátrix elemei között fennáll:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} \text{ és} \\ a_{12} &= -a_{21} \end{aligned}$$

Ezeket az egyenleteket akár Cauchy-Riemann-egyenleteknek is nevezhetnénk amiatt, hogy a komplex függvények, mint $\mathbf{R}^2$ -ből $\mathbf{R}^2$ -be menő differenciálható függvény Jacobi-mátrixaira vonatkoztatva ezeket, az előbbi módon nevezik őket.

Normált algebra

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

esetén az algebrát normált algebrának nevezzük (ekkor persze a szorzás folytonos a norma által generált topológiában).

$\mathbf{C}$ kétdimenziós normált algebra az $\mathbf{R}$ test felett a komplex szorzással és az euklideszi normával, mert

$$\|xy\|_2 = \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

sőt, $\|\cdot\|_2$ -t abszolútérték függvénynek is nevezzük ilyenkor. Megjegyezzük, hogy $\mathbf{C}$ a maximumnormával ellátva is normált algebra.

Azonban $\mathbf{C}$ saját maga felett (azaz komplex módon) egydimenziós normált algebra, a normája a komplex abszolútérték.