

A V vektortér **lineáris alterének** nevezzük a $W \subseteq V$ halmazt, ha W vektorteret alkot ugyanazokkal a műveletekkel, melyek V -nek is műveletei. Azt, hogy W altere V -nek a következőképpen jelöljük:

$$W \leq V$$

Tartalomjegyzék

- 1 Altér jellemzése
- 2 Példák
 - ◆ 2.1 Triviális alterek
 - ◆ 2.2 Generált altér
 - ◆ 2.3 Mátrix magtere és képtere
 - ◆ 2.4 Lineáris leképezés magtere és képtere
- 3 Feladatok
 - ◆ 3.1 1. (altér jellemzése)
 - ◆ 3.2 2. (generált altér)
 - ◇ 3.2.1 Megoldás
 - ◆ 3.3 3. (magtér)
 - ◇ 3.3.1 Megoldás.
 - ◆ 3.4 4. (képtér)
 - ◇ 3.4.1 1. megoldás.
 - ◇ 3.4.2 2. megoldás

Altér jellemzése

Annak ellenőrzése, hogy egy vektortér részhalmaza altér egyszeriben történik annál, minthogy ellenőrizzük, hogy a részhalmazra teljesülnek-e a vektortéraxiómák. Altér jellemezhető a következőkkel.

Tétel - Ha $(V, +, \cdot)$ vektortér a T test fölött és a $W \subseteq V$ nemüres halmaz, akkor az alábbi két kijelentés ekvivalens egymással:

1. W altere V -nek
2. minden $u, v \in W$ -re és $\lambda \in T$ -re:

$$\begin{aligned} &\diamond u + v \in W \\ &\diamond \lambda \cdot v \in W \end{aligned}$$

Tehát altér, ami zárt az összeadásra és a számmal való szorzásra.

Példák

Triviális alterek

Bármely V vektortérben maga V és a nullvektort tartalmazó $\{0\}$ halmaz altér. Az előbbi $\dim V$ dimenziós, az utóbbi nulladimenziós.

Generált altér

Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ véges vektorrendszer a T test feletti V lineáris térben, akkor a

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle := \{ \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in T \}$$

részalmazát V -nek a $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \}$ vektorrendszer által **generált altérnek** vagy **kifeszített altérnek** nevezünk.

Ez valóban altér, hiszen bármely két elemének összege és számszorosa eleme az részalmaznak:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k) + (\mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \mu_k \mathbf{v}_k) &= (\lambda_1 + \mu_1) \cdot \mathbf{v}_1 + (\lambda_2 + \mu_2) \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + (\lambda_k + \mu_k) \cdot \mathbf{v}_k \\ \mu \cdot (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k) &= (\mu \cdot \lambda_1) \cdot \mathbf{v}_1 + (\mu \cdot \lambda_2) \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + (\mu \cdot \lambda_k) \cdot \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

Az vektorrendszer rangján értjük, a vektorrendszer által kifeszített altér dimenzióját:

$$r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \dim(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle)$$

Mátrix magtere és képtere

Ha T test és $M \in T^{n \times m}$, azaz $n \times m$ -es mátrix, akkor

$$\text{Ker}(M) = \{ \mathbf{v} \in T^n \mid M\mathbf{v} = \mathbf{0} \}$$

az M mátrix **magtere**, azaz azon elemek a T^n vektortérben, melyeket a mátrix a vele való szorzás által a nullába visz és

$$\text{Im}(M) = \{ M\mathbf{v} \in T^m \mid \mathbf{v} \in T^n \}$$

az M **képtere**, azaz azon vektorok, melyek előállnak valamely vektor és az M mátrix szorzataként.

Praktikusan:

$\text{Ker}(M)$ az M együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza

$\text{Im}(M)$ azon "<http://wiki.math.bme.hu/jobbaroldalak>" "<http://wiki.math.bme.hu> halmaza az $Mx=y$ egyenletrendszerben, melyekre az egyenletrendszer megoldható.

Világos, hogy az első esetben Gauss-eliminációval kell megoldani a feladatot, a második esetben azokat az y -okat kell behatározni, amelyekre az $(M|y)$ kibővített együtthatómátrix rangja egyezik M rangjával.

Lineáris leképezés magtere és képtere

A $\in \text{Hom}(V, U)$, akkor

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\mathcal{A}) &= \{ \mathbf{v} \in V \mid \mathcal{A}\mathbf{v} = \mathbf{0} \} \\ \text{Im}(\mathcal{A}) &= \{ \mathcal{A}\mathbf{v} \in U \mid \mathbf{v} \in V \} \end{aligned}$$

Ezekkel a fogalmakkal kapcsolatos a vektorterek dimenziótétele. Ha $A \in \text{Hom}(V, U)$, akkor

$$\dim \text{Ker}(\mathcal{A}) + \dim \text{Im}(\mathcal{A}) = \dim V$$

Feladatok

1. (altér jellemzése)

Alteret alkotnak-e?

- $\mathbf{R}[X]$ -ben, a valósegütthetős polinomok terében a
 - ♦ $\{ p \mid \deg(p)=100 \text{ vagy } p=0 \}$
 - ♦ $\{ p \mid \deg(p) \leq 100 \text{ vagy } p=0 \}$
 - ♦ $\{ p \mid p\text{-nek van valós gyöke} \}$
- A valós számsorozatok terében a
 - ♦ $\{ s \mid s \text{ korlátos} \}$
 - ♦ $\{ s \mid s \text{ konvergens} \}$
 - ♦ $\{ s \mid s \text{ véges sok helyen nemnulla} \}$
- A valós függvények terében a
 - ♦ $\{ f \mid f \text{ periodikus} \}$
 - ♦ $\{ f \mid f(1) > 0 \}$
 - ♦ $\{ f \mid f \text{ injektív} \}$

2. (generált altér)

Hány dimenziós alteret generál az alábbi vektorrendszer? Adja meg a kifeszített altér egy bázisát!

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás

A vektorok az $\mathbf{R}^3$ térbeliek, így az altér legfeljebb 3 dimenziós lehet. Ha $\mathbf{A}$ -val jelöljük a fenti oszlopvektorok alkotta mátrixot, akkor a feladat megoldásban (azaz egymással összefüggő vektorok keresésében) segít az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldása. Ebből nem csak azt tudjuk majd meg, hogy lineárisan

függetlenek-e (hiszen pontosan tudjuk, hogy nem azok, mert $\dim\langle \mathbf{A} \rangle < 4$), hanem hogy hány független választható ki, vagyis az $\mathbf{A}$ rangját, $r(\mathbf{A})$ -t. $\mathbf{A}$ -t Gauss-algoritmussal átalakítva:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} &\sim_{\text{GAlg}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -6 & 10 \\ 0 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \sim_{\text{GAlg}} \\ &\sim_{\text{GAlg}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A megoldás: az utolsó két változó paraméternek vehetjük, mondjuk t és s , így kiírva az egyenletrendszert:

$$2x + y - 2t + 3s = 0$$

$$10y - 6t + 10s = 0, \text{ azaz } 5y - 3t + 5s = 0$$

innen

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{5}t - s \\ x &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}t + s + 2t - 3s\right) = \frac{7}{10}t - s \\ z &= t \\ v &= s \end{aligned}$$

a megoldás. Tehát minden t, s -re fennáll:

$$\left(\frac{7}{10}t - s\right) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{5}t - s\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezekből világosan látható, hogy az első két vektor *bázis*nak választható, mert a 3. és 4. kifejezhető, rendre $t=1, s=0$ választással, majd $t=0, s=1$ választással.

Tehát:

$$\dim\langle A \rangle = 2 \text{ és az altér egy bázisa:}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

3. (magtér)

Mi az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

magterének dimenziója és adja meg egy bázisát!

Megoldás.

Az A mátrix magtere praktikusán az $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alkotta lineáris altér, egyenletrendszeres formában:

$$\text{Ker}(A) = \{(x, y, z, v) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4v = 0 \quad \wedge \quad 2x + 3y + 4z + 5v = 0\}$$

Előzetesen, próbáljuk meg a szituációt geometriailag elképzelni! A két egyenlet egy-egy hipersík az $\mathbf{R}^4$ térben, azaz két 3 dimenziós altér. Ezek metszete a feladat, azaz egy kétdimenziós altér, azaz egy geometriai sík. Azt várjuk tehát, hogy a feladat megoldása 2 dimenziós eltér lesz. Persze, ettől még lehet hogy a feladat nem a tipikus helyzetet adja, így "<http://wiki.math.bme.hu/vakon>" "<http://wiki.math.bme.hu> csak azt mondhatjuk, hogy a keresett dimenziószám legfeljebb 4.

Gauss-eliminációhoz folyamodunk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim_{\text{GAlg}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Szintén két változó paraméternek vehet? ($v = s, z = t$), így a megoldás visszafejtve:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3t + 4s &= 0 \\ -y - 2t - 3s &= 0 \end{aligned}$$

innen

$$\begin{aligned} y &= -2t - 3s \\ x &= 4t + 6s - 3t - 4s = t + 2s \end{aligned}$$

a megoldásvektor az alábbi, mely el?áll a következ? két vektor lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t + 2s \\ -2t - 3s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Azaz a magtér a fenti két kihozott vektor által generált altér. Ezek persze nyilvánvalóan nem összefügg?k az alsó két sor sztenderd bázisra utaló alakja miatt (az 1-es sehogy se jöhet ki a 0-ból).

Tehát

$$\dim \text{Ker } \mathbf{A} = 2 \text{ és a magtér egy bázisa:}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. (képtér)

Mi az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix képterének dimenziója és adja meg a képtér egy bázisát!

1. megoldás.

Világos, hogy a mátrix oszlopai elemei a képtérnek, ugyanis vannak olyan

Megoldás.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

oszlopvektorok, melyek szorzata a mátrixal pontosan az oszlopvektorokat adja az (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) sztenderd bázis $\mathbf{R}^3$ -ban, ezekkel rendre beszorozva a mátrixot, az oszlopokat kapjuk. A kérdés, hogy generálják-e ezek a képteret, és hogy függetlenek-e. A generátorrendserségre nyilván igen a válasz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gauss-eliminációval kiderül, hogy ezek a vektorok függetlenek is, így bázist alkotnak a képtérben.

2. megoldás

Egyszerűbb kinézetű bázishoz jutunk a következő eljárással.

Azt kell megvizsgálnunk, hogy az $(\mathbf{A}|\mathbf{y})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer milyen $\mathbf{y}$ -ra oldható meg. Az $\mathbf{A}$ -val való szorzás leképezése $\mathbf{R}^3$ -ból képez $\mathbf{R}^4$ -be. A képtér elvileg lehetne 4 dimenziós, ám a dimenziótétel szerint $\dim \text{Ker } \mathbf{A} + \dim \text{Im } \mathbf{A} = \dim \mathbf{R}^3$, így $\dim \text{Im } \mathbf{A}$ legfeljebb 3. Ezt várjuk.

A kibővített együtthatómátrix:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}|\mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & y_1 \\ 1 & 3 & 1 & y_2 \\ 1 & 2 & 1 & y_3 \\ 0 & -1 & -1 & y_4 \end{bmatrix} \sim_{\text{GAlg}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & y_1 \\ 0 & -1 & -1 & y_2 - y_1 \\ 0 & -2 & -1 & y_3 - y_1 \\ 0 & -1 & -1 & y_4 \end{bmatrix} \sim_{\text{GAlg}} \\ &\sim_{\text{GAlg}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & y_1 \\ 0 & -1 & -1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 - y_1 - (y_2 - y_1) \\ 0 & 0 & 0 & y_4 - y_2 + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & y_1 \\ 0 & -1 & -1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 - y_2 + y_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ez pontosan akkor megoldható, ha teljesül az

$$y_4 - y_2 + y_1 = 0, \text{ azaz } y_1 - y_2 + y_4 = 0$$

egyenlőség (homogén lineáris egyenletrendszer) az $\mathbf{y}$ vektorra. Az egyenlet annak a hipersíknak az egyenlete, mely maga a képtér. Az ezt kielégítő vektorok pontosan az (1,-1,0,1) mátrix magterét alkotják, így a *egy* bázisa a következőképpen állítható elő: $y=t$, $z=r$, $v=s$, $x = t - s$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} t-s \\ t \\ r \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ tehát } \dim = 3 \text{ és a bázis:}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$