

Egy $n \times m$ -es **mátrix rangján** a mátrix oszlopai által kifeszített $\mathbf{R}^n$ -beli alter dimenzióját értjük. A mátrix rangja tehát k , ha oszlopai közül kiválasztható k db lineárisan független, de $k + 1$ db már nem.

Tartalomjegyzék

- 1 Definíció
 - ♦ 1.1 Példák
- 2 Sorrang és determinánsrang
 - ♦ 2.1 Példák

Definíció

Ha tehát az $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ mátrix alakja:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

ahol $A_1, A_2, \dots, A_m$ az oszlopai, akkor

$$r(A) := \dim \langle \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \rangle$$

ahol

$$\langle \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \rangle$$

jelöli az oszlopvektorok által kifeszített (generált) alteret.

Példák

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \quad r(A) := \dim \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ekkor

Világos, hogy az első két vektor független rendszert alkot, tehát $r(A)$ legalább 2 (és legfeljebb 3, mert ilyen hosszúak). A kérdés, hogy a harmadik kifejezhető-e az első kettő lineáris kombinációjaként, azaz megoldható-e az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer (λ_1, λ_2) -re? Akiből látjuk, hogy a mátrix maga az A . Ebből Gauss-eliminációval (a középső kétszeresét kivonjuk a legelsőből)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Az alsó sor így:

$$0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 = -6$$

aminek nincs megoldása. Tehát a harmadik oszlop nem fejezhető ki az első kettő lineáris kombinációjával, így függetlenek, ergó a rang 3.

Általánosan: ha az A $n \times n$ -es mátrixot Gauss-eliminálva háromszögmátrix jön ki, nemnulla főátlóbeli elemekkel, akkor A rangja a dimenzió: n .

2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 2$$

mert alsó sor tiviálisan teljesül, a felső kettőből pedig kifejezhető λ_1, λ_2 , és pedig: $\lambda_2 = 4/6 = 2/3$, $\lambda_1 = 5/3$ (és persze az első két oszlop független, mert a másodikat a 2 nemnulla miatt sehogyan se lehet kifejezni az elsőből ennek a két nullája miatt).

Sorrang és determinánsrang

A fenti fogalmaz oszloprangnak nevezzük. Belátható, hogy a független sorok maximális száma ugyanannyi, mint a független oszlopok maximális száma, azaz a sorrang egyenlő az oszlopranggal. Ebből az is következik, hogy

$$A \in \mathbf{R}^{n \times m} \Rightarrow r(A) \leq n \text{ és } r(A) \leq m$$

A számolásokban hasznos a következő tétel. Nevezzük egy tetszőleges mátrix esetén aldeterminánsnak azt, hogy a mátrix tetszőleges négyzetes részmátrixának vesszük a determinánsát. Négyzetes részmátrixot úgy választunk ki, hogy vesszük a mátrix valamely k db oszlopát és k db sorát, és a metszéspontokban lévő elemekből alkotunk egy mátrixot. Az ilyen még k -adrendű minormátrixnak, determinánsát k -adrendű aldeterminánsnak is nevezzük. Ha a mátrix $n \times n$ -es kvadratikussá, akkor maga is saját maga egy $(n$ -adrendű) minormátrixa. Ekkor

Tétel. Az A mátrix rangja az r szám, ha van r -adrendű nemnulla aldeterminánsa, de nincs $r + 1$ -ed rendű nemnulla aldeterminánsa.

Ez utóbbi fogalmat determinánsrangnak nevezzük és mely a tétel szerint egyezik a ranggal.

Példák

1.

Mátrix_rangja

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tekintsük a determinánsrangot! A mátrixot az első oszlopa szerint kifejtve kapjuk, hogy $\det(M) = 1 \cdot (6 \cdot 2 - 3 \cdot 4) = 0$. Nincs tehát 3×3 -as nemnulla aldeterminánsa. De a bal felső másodrendű aldetermináns a $6 \neq 0$, azaz van másodrendű, azaz $r(M)=2$.

2.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

C rangja nyilván kisebb négynél, mert a sorok száma négy. A Gauss-eljárás azonnal megmondja, hány független oszlop van.

$$C \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

eszerint 4 független oszlop van (az ötödik már kifejezhető a többiből).

3.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 0 & 15 & -15 & 63 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ez a lépcsős alak arról árulkodik, hogy az 1. 2. és 4. oszlop független vektorrendszert alkot, miközben a 3. kifejezhető az első kettő lineáris kombinációjaként.