

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ mondatok, akkor azt mondjuk, hogy az

$$\frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{B}$$

szimbóllummal jelölt következtetés *helyes*, ha minden olyan esetben, amikor az $A_1, A_2, \dots, A_n$ mondatok (az úgy nevezett *premisszák* vagy *feltételek*) mindegyike igaz, akkor a B mondat, azaz a *konklúzió* (következmény) is igaz.

A helyes következtetések listája elég nagy, ám vannak bizonyos tekintetben alapvetőnek tekinthető következtetések, melyeket könnyen lehet kategorizálni a *bevezetési* és *kiküszöbölési szabályok* módszere szerint.

Tartalomjegyzék

- 1 Direkt következtetések
 - ♦ 1.1 Megjegyzés
 - ♦ 1.2 Példa
- 2 Negáció, indirekt bizonyítás
 - ♦ 2.1 Példák
- 3 Boole-algebrai átalakítások
- 4 Cáfoló példák, cáfoló szituációk
 - ♦ 4.1 Példák
- 5 Házi feladatok

Direkt következtetések

A legegyszerűbb eset az *és* (jelben $\wedge$) mondatoperátorral összekötött összetett mondatokra vonatkozó bevezetési és kiküszöbölési szabály. Egy mondatoperátor kiküszöbölési szabálya lényegében az, hogy megadja, mire következtethetünk az adott operátorral összekötött mondatokból, jelen esetben például A és B összetett mondatból. Eszerint:

$$(\wedge \text{ ki}) \quad \frac{A \wedge B}{A}, \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

Azaz, ha tudjuk, hogy A és B igaz, akkor jogos kijelentenünk, akár A , akár B igazságának fennállását. A bevezetési szabály azt adja meg, hogy miből következtethetünk az adott összetételre. Világos, hogy a helyes következtetés fenti értelmezése szerint minden olyan esetben, amikor az $\{A, B\}$ premisszapár minden tagja igaz, levonhatjuk az A és B konklúziót:

$$(\wedge \text{ be}) \quad \frac{A, B}{A \wedge B}$$

A *vagy* (jelben $\vee$) bevezetési szabálya szintén nyilvánvaló:

$$(\vee \text{ be}) \quad \frac{A}{A \vee B}, \quad \frac{B}{A \vee B}$$

Ezzel szemben a kiküszöbölési szabályának tárgyalásával máris belefutottunk a logikafilozófia ingoványába, ezt persze nem tárgyaljuk, csak magát a következtetési szabályt. A *vagy* kiküszöbölési szabályát az *esetszétválasztás szabályának* nevezzük:

$$(\vee \text{ ki}) \quad \frac{\frac{A}{C}, \frac{B}{C}, A \vee B}{C} \quad \text{az esetszétválasztás szabálya}$$

Azaz ha A -ból következik a C és a B -ból is következik a C , továbbá az A és a B közül legalább az egyik igaz (ez a klasszikus *vagy*: nem feltétlenül tudjuk, melyik igaz, csak azt, hogy az egyik), akkor a C biztos igaz.

Megjegyzés

Ezekkel analóg a $\forall$ és $\exists$, azaz "<http://wiki.math.bme.hu/index.php/Logika>" és "<http://wiki.math.bme.hu/index.php/Logika>" szavakra vonatkozó szabályok is. A $\forall$ az $\forall$ -sel rokonítható, az $\exists$ a $\exists$ -gyal. Ezek az operátorok nem két mondatot kapcsolnak össze, hanem sok mondatra vonatkoznak egyszerre, abban az értelemben, hogy egy $A(x)$ predikátumból (nyitott mondatból) készítenek egy új mondatot. Például az $A(x) := x\text{-nek van emelt szint? matematika érettségije}$ nyitott mondatból a $\forall x A(x) := \text{mindenkinek van emelt szint? matematika érettségije}$ mondatot képezi, a $\exists x A(x) := \text{valakinek van emelt szint? matematika érettségije}$ mondatot képezi. Az el?bbi azt jelenti, hogy a "<http://wiki.math.bme.hu/index.php/Logika>" közül (az "<http://wiki.math.bme.hu/index.php/Logika>" valakinek azaz Pistinek, vagy Bélának, vagy Cilinek ill. valakinek van emelt érettségije matekból -- persze **nem kell feltétlenül tudnunk**, hogy kinek; az utóbbi pedig, hogy Pistinek is és Bélának is és Cilinek is és Daniellának is és ... mindenkinek megvan az emelt matekja.

$$\begin{aligned} (\forall \text{ ki}) \quad & \frac{(\forall x) A(x)}{A(t)} \quad \text{tetsz?leges } t \text{ dologra.} \\ (\forall \text{ be}) \quad & \frac{A(x)}{(\forall x) A(x)} \quad \text{ahol } x\text{-re semmilyen plusz megszorítás nincs.} \\ (\exists \text{ be}) \quad & \frac{A(t)}{(\exists x) A(x)} \quad \text{valamilyen } t \text{ dologra.} \\ (\exists \text{ ki}) \quad & \frac{A(x), (\exists x) A(x)}{C} \end{aligned}$$

Példa

A fenti következtetésekre azonnal hozhatunk példát a halmazok témaköréb?l, ugyanis a halmazm?veletek megfeleltethet?k a logikai m?veleteknek. A halmazoknál van egy kitüntetett nyitott mondat: ha H halmaz, akkor $x \in H$ azt jelenti, hogy az x az H halmazban van (esetleg közelebb?l jobban meg nem határozott) eleme benne van a H halmazban. Legyenek A és B halmazok. Ekkor A és B uniója:

$$A \cup B =_{\text{def}} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

azaz azon elemek halmaza, mely az A illetve a B közül legalább az egyikben benne vannak;

A és B metszete:

$$A \cap B =_{\text{def}} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

azaz azon elemek halmaza, mely az A -ban is és a B -ben is benne vannak.

Ha választ várnánk arra a kérdésre, hogy *mi az a halmaz*, akkor szintén a matematikafilozófia ingoványában találnánk magunkat, ezért intellektuálisan a legtisztességesebb, ha tárgyunk célját (az analízis elsajátítását) érdeklődésünk homlokterébe tartva, ezzel a kérdéssel nem foglalkozunk.

Tudjuk: két halmaz egyenlő, akkor és csak akkor, ha ugyanazok az elemeik. Formulákban:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \Leftarrow x \in B))$$

A nyílak a következtetés irányát jelzik. Az, hogy a "<http://wiki.math.bme.hu> A akkor B " "<http://wiki.math.bme.hu> (jelben: $A \Rightarrow B$) és az "<http://wiki.math.bme.hu> A -ból következik

B " "<http://wiki.math.bme.hu> (jelben: $\overline{B}$) ugyanazt jelenti, az egyáltalán nem nyilvánvaló és valójában az úgy nevezett *dedukciótétel* mondja ki, persze bizonyos itt nem részletezett feltételek mellett.

1. Feladat. Igazoljuk a disztributív szabályt, legalábbis az egyiket, az alábbi:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Bizonyítás. 1) Vegyünk egy tetszőleges x -et. Igazoljuk: "<http://wiki.math.bme.hu> x baloldal, akkor x jobboldal" "<http://wiki.math.bme.hu>.

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \cup C \end{array}$$

Esetszétválasztás jön, mert innentől nem tudjuk, x a B -ben vagy a C -ben van

$$x \in B$$

$$x \in B \text{ és } x \in A \text{ (igaz állítást bármihez$$

"<http://wiki.math.bme.hu>hozzáékelhetünk" "<http://wiki.math.bme.hu>: és be)

$$x \in A \cap B$$

$$x \in (A \cap B) \text{ vagy } x \in (A \cap C) \text{ (bármi}$$

"<http://wiki.math.bme.hu>hozzáékelhető" "<http://wiki.math.bme.hu> egy igaz kijelentéshez: vagy be)

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$x \in C$$

$$x \in C \text{ és } x \in A \text{ (igaz állítást bármihez$$

"<http://wiki.math.bme.hu>hozzáékelhetünk" "<http://wiki.math.bme.hu>: és be)

$$x \in A \cap C$$

$$x \in (A \cap C) \text{ vagy } x \in (A \cap B) \text{ (bármi}$$

"<http://wiki.math.bme.hu>hozzáékelhető" "<http://wiki.math.bme.hu> egy igaz kijelentéshez: vagy be)

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ azaz mindkét esetben kijött a jobboldal.}$$

2) Visszafelé ugyanígy, csak felfelé.

Negáció, indirekt bizonyítás

A tagadás (negáció) kiküszöbölési szabálya az úgy nevezett *kettős tagadás törlésének szabálya*:

$$(\neg \text{ki}) \quad \frac{\neg \neg A}{A}$$

A bevezetési szabálya pedig az úgy nevezett *redukció ad absurdum*.

$$(\neg \text{be}) \quad \frac{\frac{A}{C}, \frac{A}{\neg C}}{\neg A}$$

Ezeknek a segítségével olyan fontos tételeket is levezethetünk, mint a De-Morgan azonosságok:

$$\begin{aligned}\neg(A \vee B) &\equiv \neg A \wedge \neg B \\ \neg(A \wedge B) &\equiv \neg A \vee \neg B\end{aligned}$$

A fentiekben a $\equiv$, hogy a két oldalon lévő kifejezés kölcsönösen következik egymásból.

Példák

Ami még hiányzik a logikai operációk és a halmazműveletek megfeleltetéséből, az negáció halmazműveletekkel történő átfogalmazása, mely nem titok, a komplementerképzés lesz. Sajnos komoly logikai problémát okozna, ha komplementeren egy A halmaz esetén azon elemeket értenénk, melyek nem az A -ban vannak. Ekkor ugyanis egy kisebb halmaz, mint mondjuk az $\{1,2,3\}$ komplementere a világ összes ezektől különböző dolgából állna. Ezzel azonban világos, hogy megint a matematikafilozófia ingoványos talajára tévednénk, így ezt másként tesszük.

Ha H halmaz, akkor az A halmaznak a H -ra vonatkozó komplementere az

$$\overline{A}|_H =_{\text{def}} \{x \in H \mid x \notin A\}$$

Ha a fenti H halmazt alkalmasan nagyra választjuk, akkor elkerüljük a logikai problémát.

Ezzel a De-Morgan-azonosságok halmazokkal megfogalmazott változata a következő alakban írható:

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}\end{aligned}$$

A fenti egyenlőségek középiskolából ismert relációval is kifejezhetők. Azt mondjuk, hogy A része B -nek, ha minden olyan esetben, amikor egy elem eleme A -nak, akkor B -nek is eleme, jelben:

$$A \subseteq B$$

Azaz az, hogy $A = B$ az ugyanaz, mint hogy $A \subseteq B$ és $A \supseteq B$ is teljesül.

2. Feladat. Példaként nézzük csak a

$$\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

esetet.

Megoldás. Vegyünk egy elemet a jobboldalból és igazoljuk, hogy benne van a baloldalban. Tudjuk a metszet definíciója miatt, hogy ekkor

$$\begin{aligned} x &\notin A \\ x &\notin B \end{aligned}$$

$x \in A \vee B$ (indirekt feltevés), ezek után esetszétválasztáshoz kell folyamodnunk.

Mindkét esetben ellentmondásra jutunk:

ha $x \in A$, akkor a legfels?

ha $x \in B$, akkor a legfels? alatti egyenlőség miatt jutunk ellentmondásra, így a

$$x \notin A \vee B \text{ konklúzióra jutottunk.}$$

Egy másik jellegzetes példa a részhalmaz relációval kapcsolatos. Előtte azonban fel kell idéznünk a kvantorkra vonatkozó De-Morgan-azonosságot. A "<http://wiki.math.bme.hu/létezik>" "<http://wiki.math.bme.hu> szót (mely a "<http://wiki.math.bme.hu/minden>" "<http://wiki.math.bme.hu/duálisa>") -tel jelöljük:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x)A(x) &\equiv (\exists x)\neg A(x) \\ \neg(\exists x)A(x) &\equiv (\forall x)\neg A(x) \end{aligned}$$

A kijelentések világosak: ha nem minden dolog A , akkor van olyan dolog, ami nem A . Ha nem létezik A , akkor minden dolog nem A tulajdonságú.

3. Feladat. Igazoljuk, hogy az üres halmaz minden halmaznak része.

Megoldás. Legyen A tetszőleges halmaz. Indirekten tegyük fel, hogy

$$\emptyset \not\subseteq A$$

Az $\emptyset \subseteq A$ formulákban így néz ki:

$$(\forall x)(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

Egy ilyen tagadása az, hogy a kvantort átírjuk a duálisára és a tulajdonságot tagadjuk:

$$(\exists x)(x \in \emptyset \wedge x \notin A)$$

Ekkor azonban azt kaptuk, hogy létezik az üres halmaznak eleme, ami ellentmondás.

Boole-algebrai átalakítások

Világos, hogy az unióra és a metszetre a definíciójuk miatt ugyanazok az azonosságok vonatkoznak, mint a "<http://wiki.math.bme.hu/vagy>" "<http://wiki.math.bme.hu/ra> és az "<http://wiki.math.bme.hu/és>" "<http://wiki.math.bme.hu/re>. Ezeket a szabályokat Boole-algebrai azonosságoknak nevezzük. Ahhoz, hogy teljes legyen a kép még egy fontos halmazműveletet fel kell

elevenítenünk: Legyenek A és B halmazok. Ekkor A mínusz B vagy A különbség B :

$$A \setminus B =_{\text{def}} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

azaz azon elemek halmaza, melyek az A -nak elemei, de a B -nek nem.

Nagyon hasznos azonosság, hogy a különbség átírható komplementer és metszet segítségével:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

ahol a komplementerképzés egy olyan halmazra vonatkoztatjuk, melyben minden szóban forgó halmaz részhalmazként benne van, például jelen esetben $H = A \cup B$ alkalmas ilyen halmaz.

4. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A , B és C halmazokra

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

Megoldás. Írjuk fel a baloldalt és alakítsuk addig, míg ki nem jön a jobboldal:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \setminus C) &= A \cap \overline{B \setminus C} = A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) = \\ &= (A \setminus B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Cáfoló példák, cáfoló szituációk

Azt, hogy egy kijelentés igaz, azt a matematikában *bizonyítással* látjuk be. Például egy "http://wiki.math.bme.huha A , akkor B "http://wiki.math.bme.hu állítás esetén az A -ból levezetjük B -t.

Azt, hogy egy kijelentés hamis, általában cáfoló ellenpélda vagy cáfoló szituációra való rámutatással. Például egy "http://wiki.math.bme.huha A , akkor B "http://wiki.math.bme.hu állítás cáfolása esetén meg kell mutatunk, hogy a megadott cáfoló szituációban A ugyan igaz, de B nem. Ez azt jelenti, hogy ellenpélda esetén is kell bizonyítanunk, éspedig az el?z? esetben azt, hogy "http://wiki.math.bme.hubár A , de nem B "http://wiki.math.bme.hu. A módszer tehát a következő: 1) adunk egy példát 2) belátjuk, hogy az adott példa ellenpélda.

Példák

5. Feladat. Legyen A , B és C tetszőleges halmaz, továbbá legyen

$$\begin{aligned} K &= (A \setminus (B \setminus C)) \setminus C \text{ és} \\ L &= (A \setminus B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, hogy melyik tartalmazás áll fenn!

1. $K \subseteq L$
2. $K \supseteq L$

Megoldás. Az $A \cup B$ -re vonatkozó komplementerképzésre áttérve:

$$K = A \cap \overline{B \setminus C} \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) \cap \overline{C} = ((A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C)) \cap \overline{C} =$$

$$= ((A \setminus B) \cup (A \cap C)) \cap \overline{C} = L \cap \overline{C}$$

Tehát $K \subseteq L$ biztosan igaz, azaz (1) igaz.

Ellenben (2) hamis, *ellenpélda*:

$$A = C = \{1\} \neq \emptyset, B = \emptyset$$

Ugyanis, ekkor $K = \emptyset$, $L \neq \emptyset$.

Házi feladatok

1. $K \setminus (K \setminus L) = L \setminus (L \setminus K)$
2. $(K \setminus L) \setminus (K \setminus M) = K \setminus L \cap M$
3. $(K \setminus L) \setminus M = (K \setminus M) \setminus (L \setminus M)$