<Matematika A1a 2008

Tartalomjegyzék

Határozott integrál

Az egyváltozós analízis történetileg kialakult két jellegzetes témaköre közül az egyik az érint?proléma (lényegében a differenciálelmélet) a másik a területszámítás problémája, vagy régies elnevezéssel a kvadratúra-feldat (ami lényegében az integrálelmélet). Most a kvadratúra, azaz a függvénygörbe alatti terület definícióját adjuk meg. Ehhez azonban néhány segédfogalmat kell megismernünk.

Az [a,b] korlátos és zárt intervallum egy **Riemann-felosztás**án nem mást értünk mint egy olyan kiválasztófüggvényt, mely az [a,b]-t unióként el?állító, egymásba nem nyúló intervallumokból álló halmaz minden egyes eleméhez egy az adott elemben lév? elemet rendel, azaz egy olyan

$$\eta:\{[x_0,x_1],[x_2,x_3],...,[x_{n-1},x_n]\}\to[a,b]$$

függvényt, melyre:

1. n olyan véges természetes szám, hogy $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ és
2. minden J Dom( ) esetén $\eta(J)\in J$.

Az [a,b] összes **Riemann-felosztásai halmazát** RF[a,b] jelöli. Azon Riemann-felbontások halmazát, amelyekben az összes részintervallum hossza kisebb egy > 0 pozitív számnál, azt RF [a,b] jelöli, azt a halmazt az [a,b] összes **-nál finomabb Riemann-felosztásának** nevezük.

Egy *f*, az [a,b]-n értelmezett függvény egy **Riemann-közelít? összegén** a

$$\sigma_f(\eta) = \sum_{i=1}^{n} f(\eta([x_{i-1}, x_i]) \cdot |x_i - x_{i-1}|)$$

ahol a fenti jelölésekkel az [a,b] egy Riemann-felosztása.

Ekkor már definiálhatjuk az integrálhatóságot:

Definíció. Legyen *f*:[a,b] $\longrightarrow$ **R**egy zárt és korlátos intervallumon értelmezett függvény. Azt mondjuk, hogy *f* **Riemann-integrálható** és integrálja az I valós szám, ha

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \eta \in \mathrm{RF}_\delta[a,b])(|\sigma_f(\eta) - I| < \varepsilon)$$

Belátható, hogy ha *f* integrálható, akkor I egyértelm? és ekkor ennek a számnak a jelölésére az

$$\int_a^b f$$, vagy az $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

szimbólum szolgál.

Az [a,b] intervallumon Riemann-integrálható függvények halmazát R[a,b] jelöli.

Az integrál lényegében a függvénygörbe alatti terület. Integrálható függvény esetén létezik ez a terület, azaz a Riemann-felosztást egyre finomabbra véve, a Riemann-közelít? összeg minden el?re megadott legnagyobb eltérésnél közelebb kerül I-hez.

Világos, hogy ha egy függvény integrálható, akkor minden részintervallumán is integrálható (hisz ekkor azokat a felosztásokat kell venni, amik a részintervallumon belül is felosztások, és persze ezek szerint is képezve a határátmenetet, létez? határértéket kapunk). Minhogy az integrál egy szám, integrálható *f* esetén értelmes ha definiáljuk a következ?, úgy nevezett **integrálfüggvény**t (vagy a-ban elt?n? integrálfüggvényt):

$$\int f : [a,b] \to \mathbf{R}, x \mapsto \int_a^x f$$

Definíció szerinti példák

1. Példa. Jóformán az egyetlen függvény, aminek az integrálhatóságát a definíció alapján könnyen igazolni tudjuk, az a konstans függvény. Az f(x) = c esetén a kiválaszott pontok mindig c függvényérték?ek, és az összes közelít? összeg mindig

$$\sigma_f(\eta) = \sum_{i=1}^{n} c \cdot (x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(b-a) = \mathrm{const.}$$

azaz

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$$

Már ezzel is azonban fel tudunk írni egy integrálfüggvényt: f:[a,b]$\longrightarrow$ **R**, f c esetén:

$$\left(\textstyle\int c\right)(x) = \int_{t=a}^{x} c\,\mathrm{d}t = cx - ca$$

2. Példa. Nem minden függvény integrálható.

2. a. Zárjuk le a reciprok függvényt egy ponttal:

$$f:[0,1]\to\mathbf{R},\ x\mapsto\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x\in(0,1]\\ 1854, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

(Riemann az 1854-es habilitációs dolgozatában definiálta és vizsgálta a most Riemann-integrálhatóságnak nevezett fogalmaz, mindazonáltal az integrál els?, a szigorúság követelményének eleget tév? definícióját Cauchy adta (1821) az intuitívet pedig Leibniz.) Ez a függvény nem integrálható, mert akármilyen fimon intervallumfelosztás esetén, ha az els? intervallumot hosszúra választjuk, definiálható egy ($[x_0,x_1]$) < ^{2} érték, azaz f(($[x_0,x_1]$)) > 1/ ^{2}. Ekkor viszont az els? téglalap területe 1/ lesz, ami \to 0 esetén a + -be tart, azaz az összterület nem lesz véges.

2. b. Legyen *f* a Dirichlet-függvény:

$$f:[0,1]\to\mathbf{R},\ x\mapsto\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x\in\mathbf{Q}\\ 0, & \text{ha} \quad x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$

ahol **Q** a racionális számok halmaza, **R / Q** pedig nyilván az irracionális. Ez a függvény nem Riemann-integrálható, bár korlátos, mert akármilyen finom intervallum-felbontás esetén van egy olyan Riemann-kiválasztó függvény, mely mindig racionális pontokat választ ki és ezáltal a közelít? összeg mindig 1 és olyan, mely mindig irracionálist, azaz ezzel a közelít? összeg 0. Mindig lesz tehát két olyan felbontás, mely összegek különbsége legalább 1.

A Riemann-inregrálhatóság szükséges és elégséges feltétele

Bár a Riemann-integrálhatóság általában könnyen kezeéhet? fogalom, a következ? tétel bizonyításához azonban az egyváltozós analízis szinte összes eszközét be kell vetni. Nem csoda, hogy csak 1905-ben fogalmazhatta meg Lebesgue, egy tágabb perspektívából szemlélve a Riemann-integrált.

Tétel. Legyen *f*: [a,b] $\longrightarrow$ **R** korlátos és zárt intervallumon értelmezett függvény. *f* pontosan akkor integrálható, ha korlátos, és szakadási helyeinek halmaza Lebesgue-nullmértték? halmaz, azaz

$$f\in\mathrm{R}[a,b] \ \Leftrightarrow\ (f\in\mathrm{B}[a,b]\ \wedge\ \mathrm{m}(\mathrm{discon}(f))=0)$$

Itt Lebesgue-nullmérték?nek nevezünk egy H **R** halmazt, ha minden > 0-hoz létezik olyan (I_n) intervallumsorozat, hogy ennek összhossza < és lefedi H-t.

Biztos nem nullmérték? például egy nemelfajuló intervallum, mert annak a mértéke az intervallum nemnulla hossza. De véges halmaz nullmérték?, mert lefedhet?, egy határértékben elt?n? intervallumsorozat-rendszerrel. Belátható, hogy megszámlálható pont nullmérték? halmazt alkot. Konkrétan, könyen belátható, hogy az 1/n pontjai nullmérték? halmazt alkotnak.

Világos, hogy a Dirichlet-függvényes példa azért jó ellenpélda, mert ez a függvény [0,1]-en mindenhol szakad, azaz discon(Dir)=[0,1], melynek a mértéke 1.

Példa. Felvet?dik a kérdés: van-e konitinuum sok helyen szakadó, Riemann-integrálható függvény. A válasz igenl?. A konstrukció e következ?. El?ször definiáljuk az **ördög lépcs?je** függvényt:

A [0,1] intervallumot osszuk 3 részre és vegyük ki a bels? nyílt harmadot. Ezen a szakaszon legyen a függvény értéke 1/2. Ismételjük a megmaradt két zárt intervallumra, és az érték legyen ott 1/4 ill. 3/4. A fennmaradt részeket is osszuk, majd a középs? harmad értéke mindig a két széls? közepe legyen... Ha csak a bels? harmadokat vesszük, akkor ami megmarad a halmazból, az az úgy nevezett Cantor-halmaz. A Cantor-halmaz kontinuum számosságúan végtelen, de Lebesgue-nullmérték? -- ezt a két dolgot persze nem bizonyítjuk. A függvény mindenhol folytonos, a m.m- deriválható és a deriváltja 0 (de nem intervallumon értelmezett: Dom = [0,1]\C). Ha most vesszük a deriváltfüggvényét és kiterjesztjük a C pontjaiban úgy, hogy ott 1 legyen az értéke, akkor ez egy kontinuum számosságú, de Lebesgue-nullmérték? halmazon szakadó, korlátos függvény, azaz integrálható. És az integrálja 0. Ebb?l is látható, hogy a fenti ekvivalenciatétel csodálatosan oldja meg, hogy bár a Riemann-felosztás véges, kontinuum számosságú, L-0-m. résszel is el tud bánni.

A Riemann-integrálhatóság néhány kritériuma

Részletezünk néhány hasznos esetet a fenti tételb?l.

1. $f \in \mathrm{R}[a,b] \;\Rightarrow\; f \in \mathrm{B}[a,b]$
   csak korlátos függvények R-intgrálhatóak
2. $f \in \mathrm{R}[a,b] \;\Leftarrow\; f \in \mathrm{C}[a,b]$
   (Cauchy) világos: ha folytonos, akkor nincs szakadási pontja, és korlátos a Weierstrass-tétel miatt
3. $f \in \mathrm{R}[a,b] \;\Leftarrow\; f \in \mathrm{M}[a,b]$
   monoton függvény R-integrálható (minden feltétel nélkül), amiatt a nem említett tétel miatt, hogy intervallumon értelmezett, monoton függvénynek csak megszámlálható szakadási pontja van, korlátos és zárt intervallumon pedig egy ilyen függvény korlátos.

Feladat. Intergálhatóak-e az alábbi függvények és ha igen, mi az integráljuk?

1.

$$f:[-1,1]\to\mathbf{R},\; x\mapsto\begin{cases}|x|\sin(\frac{1}{x}), & \text{ha} \quad x\neq 0\\[2ex] 0, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

Igen, mert folytonos (illetve legfeljebb csak 1 ponton szakad, miközben korlátos). Ezen kívül páratlan: |-x|sin(1/-x) = -|x|sin(1/x), emiatt az origóra szimmetrikus intervallumon az integrálja:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

2.

$$f:[0,1]\to\mathbf{R},\ x\mapsto\begin{cases}\frac{1}{2^{i+1}}, & \text{ha}\quad \frac{1}{2^{i+1}}<x\leq\frac{1}{2^{i}}\\ 0, & \text{ha}\qquad x=0\end{cases}$$

Igen, mert monoton. Az integrálját elegend? egyetlen végtelenül finomodó felosztássorozathoz tartozó közelít? összegsorozat határértékeként számolni, hiszen ha ez nem konvergálna, akkor nem teljesülne a definícióban megkövetelt határérték létezése. Az intervallumot 2^m részre osztjuk fel. Ekkor az összeg:

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{4^k}=-1-\frac{1}{4^m}+\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{4^k}$$

Ennek a határértéke a mértani sor összegképlete miatt:

$$\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=-1+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

3.

$$f:[0,1]\to\mathbf{R},\ x\mapsto\begin{cases}\frac{1}{1+\sin(\frac{1}{x})}, & \text{ha}\quad x\neq\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi},0\\ 0, & \text{ha}\quad x=\frac{1}{\frac{-\pi}{2}+2k\pi},0\end{cases}$$

Megszámlálható sok szakadása van ugyan a függvénynek, de nem korlátosan a szakadások, így a függvény nem integrálható:

$$\nexists\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Az határozott integrál néhány tulajdonsága

A következ?kben feltesszük, hogy az f és g a formulákban szerepl? intervallumokat tartalmazó valamely intervallumon Riemann-integrálható.

1. Intervallum szerinti additivitás:
$$\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$$
2. Integrandus szerinti additivitás:

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f + g$$

3. Integrandus szerinti monotonitás.

$$f \leq g \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

4. Integrandus szerinti homogenitás:

$$c \cdot \int_a^b f = \int_a^b cf \qquad (c \in \mathbf{R})$$

5. Abszolút becslés.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

6. Triviális alsó és fels? becslés.

$$(\inf f) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq (\sup f) \cdot (b-a)$$

7. Eltolásinvariancia.

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Az integrálfüggvény néhány tulajdonsága

Az integrálfüggvény viselkedését vizsgálva meglep? következtetésre juthatunk.

Példa. Vegyük az alábbi lépcs?s függvényt:

$$f : [0,2] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in [0,1) \\ 2, & \text{ha} \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

írjuk fel az integrálfüggvényét tudva-tudván, hogy az nem más mint a területfüggvény:

$$T(x) = \left\{ \begin{array}{cl} x \cdot 1, & \text{ha} \quad x \in [0,1) \\ 1 + 2(x-1), & \text{ha} \quad x \in [1,2] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cl} x, & \text{ha} \quad x \in [0,1) \\ 2x-1, & \text{ha} \quad x \in [1,2] \end{array} \right.$$

Ábrázolva, azt kapjuk, hogy T képe egy törött vonal, **folytonos** és mindehol, ahol nem törik, a **deriváltja az integrandus**. T diff.-ható a [0,1)U(1,2] halmazon és

$$T' = f|_{[0,1)\cup(1,2]}$$

Az integrálfüggvény differenciálhatóságáról

Az integrandus folytonossági helyein az integrálfüggvény valóban differenciálható. Az alábbi tételt az analízis els? alaptételének szokás nevezni.

Tétel. -- A kalkulus fundamentális tétele I. -- Legyen *f*:[a,b] $\longrightarrow$ **R** integrálható. Ha f folytonos az *u* [a,b] pontban, akkor f differenciálható *u*-ban és

$$\left(\int f\right)'(u) = f(u)$$

Bizonyítás. *f* folytonos *u*-ban, ezért tetsz?leges > 0-ra létezik olyan > 0, hogy f$|_{B(,u)}$ B (f(u)), azaz:

$$f(u) - \varepsilon \leq \inf f|_{B_\delta(u)} \leq \sup f|_{B_\delta(u)} \leq f(u) + \varepsilon$$

Írjuk fel a deriváltra a különbségi hányadost! Legyen x,y olyan, hogy az u sugarú környezetébe esik. Ekkor az integrál intervallum szerinti additivitása miatt:

$$\frac{\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f}{y-x} = \frac{\int\limits_x^y f}{y-x}$$

Ha most a tirviális alsó és fels? becslést vesszük:

$$f(u) - \varepsilon \leq \inf f|_{[x,y]} = \frac{\inf f|_{[x,y]}\cdot(y-x)}{y-x} \leq \frac{\int\limits_x^y f}{y-x} \leq \frac{\sup f|_{[x,y]}\cdot(y-x)}{y-x} \sup f|_{[x,y]} \leq$$

s mivel tetsz?leges volt, ezért f(u) nem más, mint az integrálfüggvény u-beli különbségi háényadosának határértéke (az x=u helyettesítéssel). QED

Látható, hogy a bizonyításban többet láttunk be. Egyfajta u körüli "http://wiki.math.bme.huegyenletes differenciálatóságot"http://wiki.math.bme.hu, az úgy nevezett er?s differenciálhatóságot. Ez azért lehet fontos, mert ha az integrálfüggény deriváltja nem nulla, akkor nem csak ?, de az inverze is Lipschitz-folytonos, amib?l pedig az következik, hogy mind az i.f. mind az inverze nullmérték? halmazt nullmérték?be képez.

Az integrálfüggvény Lipschitz-tulajdonsága

És persze az integrálfüggvény "http://wiki.math.bme.hunagyon"http://wiki.math.bme.hu folytonos, egészen pontosan Lipschitz-tuljadonságú vagy más névven Lipschitz-folytonos, azaz

létezik olyan L nemnegatív szám, hogy minden x,y [a,b]-re

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x-y|$$

azaz létezik olyan L, hogy minden x,y [a,b]-re

$$\left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| \leq L|y-x|$$

Ugyanis a triviális fels? becslésb?l:

$$\left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| \leq \left|\int_x^y f\right| \leq \int_x^y |f| \leq \sup|f|\,|_{[x,y]} \cdot |y-x| \leq \sup|f| \cdot |y-x|$$

ahol L-nek alkalmas a sup |f| szám.

A Lipschitz-tulajdonság és folytonosság kapcsolatáról lásd még [itt].

Példák

$$\left(\int_0^x \mathrm{sc}\,t\,\mathrm{dt}\right)'(x) = ?$$

$$\left(\int_0^{\sin x} \sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t\right)'(x) = ?$$

Vizsgáljuk meg növekedés szempontjából az

$$[0,+\infty) \to \mathbf{R},\ x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

szinusz integrálisz függvényt!

Primitívfüggvények

Definíció. Azt mondjuk, hogy az *f*:[a,b] $\longrightarrow$ **R** függvénynek primitív függvénye az *F*:[a,b]$\longrightarrow$ **R** differenciálható függvény, ha F' = f.

Világos, hogy ha F primitív függvénye f-nek, akkor akármilyen konstans C-vel F + C is primitív függvénye f-nek, hisz (F + C)'= F' = f. Ennél több is igaz. Ha f-nek primitívfüggvénye F, akkor f összes primitívfüggvénye F + C alakú, ahol C tetsz?leges valós szám. Ez az alábbi fontos tétel közvetlen következménye:

Tétel. Ha az *F*:[a,b]$\longrightarrow$ **R** differenciálható függvény olyan, hogy F'   0, akkor létezik olyan C valós szám, hogy F   C.

Bizonyítás. Egyszer?en a Lagrange-tételt kell alkalmazni F egy tetsz?leges [a,x]-re történ? lesz?kítésére:

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(\xi) = 0$$

azaz

$$F(a) = F(x) \qquad (x \in [a,b])$$

QED

Ha tehát egyáltalán van f-nek van primitív függvénye és F ilyen, akkor ezek halmaza:

$$\{F + C \mid C \in \mathbf{R}\}$$

Talán fellengz?sség, de a fenti tételt néha az integrálszámítás alaptételének nevezik. Ennek egy kiterjesztett formája azonban tényleg méltó erre a névre:

Tétel. Ha az *F*:[a,b]⟶ **R** differenciálható függvény majdnem mindnehol differenciálható, ezekben a pontokban a derivált nulla és *F* Lipschitz-tulajdonságú, akkor *F* konstans.

Az alábbi tétel szerint, amit szintén joggal neveznek a kalkulus fundamentális tételének, ha egy integrálható függvénynek van primitív függénye, akkor az integrálfüggvények és primitívfüggvények halmaza egybeesik, s?t:

Tétel. *Newton--Leibniz-formula* Legyen *f*:[a,b]⟶ **R** integrálható és létezzen primitív függvénye. Ekkor f mindnen F primitív függvényére:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Ez a kalkulus második fundamentális tétele. Érdemes alaposan megvizsgálni a feltételeit, mert tanulságos példákra lelhetünk.

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
+ létezik primitív függvénye            +          Dir
+                                        +
+                                        +
+                ********************************************************
+       g'       *          h'           +             R-integrálható   *
+                *                       +                              *
+                *  ###############      +                              *
+                *  #  folytonos  #      +                              *
+                *  #             #      +                              *
+                *  ###############      +          Ent|[0,2]           *
+                *                       +                              *
+                *                       +                              *
+++++++++++++++++*++++++++++++++++++++++++                              *
                 *                                                      *
                 *                                                      *
                 *                                                      *
                 ********************************************************
```

A Dir Dirichlet-függvények nem létezik primitívfüggvénye, mert ha lenne olyan függvény, aminek ? a deriváltja lenne, akkor ?, mint deriváltfüggvény nem lenne Darboux-tulajdpnságú: két függvényértéke között nem mindent venne fel. Azt is megéztük, hogy R-integrálja sincs. (Bár Lebesgue-integrálja 0.)

Az Ent egészrész függvény integrálható (egy korlátos és zárt intevallumon), mert monoton, de nincs primitív függvénye, mert derivált nem ugorhat.

Legyen g : [-1,1] $\longrightarrow$ **R** a következ?:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

Ekkor g differenciálható, így g'-nek g primitívfüggvénye, de tudjuk, hogy g'-nek nem korlátos másodfajú szakadésa van a 0-ban, így g' nem lehet integrálható.

Végül nézzünk példát olyan függvényre, mely nem folytonos, de értelmes rá a N--L-formula. Legyen h: [-1,1] $\longrightarrow$ **R** a következ?:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

Ekkor g differenciálható, így g'-nek g primitívfüggvénye, és tudjuk, hogy g' korlátos és csak a 0-ban van egyetlen szakadása, így g' integrálható.

Megjegyezük, hogy a görbe alatti területet nem véges összegekkel, hanem végtelen sorral közelít? Lebesgue-integrál olyan általános, hogy ilyen vagy még általánosabban definiált értelmeben nem integrálható függvényt keresni már komoly matematikai/halmazelméleti kihívást jelent.

A Newton--Leibniz-formula bizonyítása. Belátjuk, hogy a baloldal és a jobboldal abszolút eltérése minden pozitív számnál kisebb. Legyen > 0. Ekkor az integrálhatóság miatt létezik olyan > 0 szám, hogy **minden** RF [a,b] Riamann-felosztásra

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\eta([x_i, x_{i-1}])) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

A bizonyítás trükkje az, hogy az F(b)-F(a) különbséget a közelító összegben lév? sok taggal, mint teleszkópikus összeggel tudjuk el?állítani. Ugyanis a Lagrange-féle középértéktétel miatt egy tetsz?legesen rögzített RF [a,b] felosztás minden részintervallumán létezik olyan $_i$ $[x_{i-1},x_i]$, hogy

$$f(\xi_i) = F'(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Emiatt, ha azt az felosztást választjuk, melynek osztópontjai az &eta osztópontjaival esenek egybe, de a részintervallumokból rendre a x_i értékeket választja ki, akkor fennáll:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi([x_i, x_{i-1}])) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Itt az összeg tagjai úgy esnek össze, ahogy azt a teleszkópikus összegeknél láthatjuk. Végül

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\eta([x_i, x_{i-1}])) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f\right| = \left|F(b) - F(a) - \int_a^b f\right| < \varepsilon$$

s mivel tetsz?leges volt, ezért az egyenl?ség fennáll. QED

Az ábrán van egy különlegesen fontos eset. Amikor az integrandus folytonos, akkor a fügvénynek biztosan létezik primitívfüggvénye. Ez annak a tételnek a duálisa, hogy folytonos függvény integrálható.

Tétel. *f* C[a,b], akkor *f*-nek (biztosan) létezik primitívfüggvénye.

Ugyanis ekkor az integrálfüggvény minden pontban differenciálható, azaz az integrálfüggény primitívfüggvénye *f*-nek.

Jelölés. Ha f folytonos, akkor indokolt a primitív függvények összességét a

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

alakban írni, ahol C tetsz?leges szám.

Megjegyzés. Ha tehát az a kérdés, hogy melyek a primitív függvényei f-nek, akkor a válasz a fenti kifejezés, ahol a **határozatlan integrált** szimbolizáló tag általában egy konkrét függvény.

Primitívfüggvény-keresés

Primitívfüggvény-keresésnek két metódusa van. Az egyik a **helyettesítéses integrálás**, a másik a **parciális integrálás**. Ezek el?tt azonban egy triviális módszer, a deriválási táblázat megfodítása és az integrál eltolásinvarianciájának felhasználása. (Esetleg a lineáris argumentumú alapintegrál kiszámítása.)

Alapintegrálra visszavezethet? integrálok

Ha tehát vesszük az elemi függvények és inverzeinek deriválási táblázatát, akkor jobbról balra olvasva megkapjuk az **alapintegrálok** táblázatát.

$$\begin{aligned}
\int x^n\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C && (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}) \\
\int x^\alpha\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C && (x \in \mathbb{R}^+, -1 \neq \alpha \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \ln|x| + C && (0 \neq x \in \mathbb{R}) \\
\int e^x\,\mathrm{d}x &= e^x + C && (x \in \mathbb{R}) \\
\int a^x\,\mathrm{d}x &= \frac{a^x}{\ln a} + C && (x \in \mathbb{R}, 1 \neq a \in \mathbb{R}^+)
\end{aligned}$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}\, x + C \qquad (k\pi \neq x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + C \qquad (\frac{k\pi}{2} \neq x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})$$

$$\int \mathrm{sh}\, x \, \mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \mathrm{ch}\, x \, \mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} \, \mathrm{d}x = -\mathrm{cth}\, x + C \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \, \mathrm{d}x = \mathrm{th}\, x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \mathrm{arc\,tg}\, x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C = \begin{cases} \mathrm{ar\,th}\, x + C & (1 > |x| \in \mathbb{R}) \\ \mathrm{ar\,ch}\, x + C & (1 < |x| \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C \qquad (1 > |x| \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x = \mathrm{ar\,sh}\, x + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x = \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C = \begin{cases} \mathrm{ar\,ch}\, x + C & (1 < x \in \mathbb{R}) \\ -\mathrm{ar\,ch}(-x) + C & (1 > x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Alapintegrálok kiszámítása táblázatból

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + C$$

vagy a legkönnyebben elronthatók:

$$\int 5 \, \mathrm{d}x = 5x + C$$

$$\int 0 \, \mathrm{d}x = C$$

Alapintegrálok és eltolásinvariancia

Az integrál **eltolásinvarianciáját** használva:

$$\int \frac{1}{x+8}\,\mathrm{d}x = \ln|x+8| + C$$

Lineáris agrumentumú integrandus

A **lineáris agrumentumúkra** vonatkozó képlet:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

ahol F'=f. Hiszen az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b) = \frac{1}{a}\cdot f(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$$

Ezzel pl:

$$\int \sin(5x-7)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos(5x-7) + C$$

Megjegyzés. Érdemes fejünkbe vésni a sin függvény deriváltajainak függvénysorozatát:

$$\begin{array}{l} \sin \\ \cos \\ -\sin \\ -\cos \\ \sin \\ \cos \\ \vdots \end{array}$$

felfejé haladva integrálunk, lefelé haladva deriválunk.

pl.

$$\int e^{(2008x-2007)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2008}e^{(2008x-2007)} + C$$

Polinom/lineáris alak

$$\int \frac{x-3}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+1-4}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{4}{x+1}\,\mathrm{d}x = x - 4\ln|x+1| + C$$

$$\int \frac{2x+1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(x+2)-3}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int 2 - \frac{3}{x+2}\,\mathrm{d}x = 2x - 3\ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{x^2+2}{x-1}\,\mathrm{d}x = ?$$

itt már érdemes polinomosztással eljárni:

```
   (x^2 + 2) : (x - 1) = x + 1
-   x^2 - x
   ---------
      x + 2
-     x - 1
     --------
          3
```

$$\int \frac{x^2+2}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int x+1+\frac{3}{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+x+3\ln|x-1|+C$$

Néha $x^2 + 1$ nevez?j?re is m?ködik:

$$\int \frac{x^2-7}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-8}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 1-\frac{8}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x-8\operatorname{arc\,tg} x+C$$

Linearizáló formulák

Ezek arra alkalmasak, hogy a $\sin^2$, $\cos^2$, sh^2. ch^2 függvényeket (illetve alkalmasan megváltoztatott argumentumú változatukat) ki lehessen integrálni:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}$$
$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}$$

Mindezek a következ?k miatt állnak fenn:

$$\cos^2+\sin^2 = 1$$
$$\cos^2-\sin^2 = \cos(2x)$$

ezért ezeket kivonva ill. összeadva, majd 2-vel elosztva a fels? kett?t kapjuk. A másik kett?:

$$\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2 = 1$$
$$\mathrm{ch}^2+\mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}(2x)$$

Itt érdemes megjegyezni az **Osborne-szabályt**: ha egy trigonometrikus azonosságban kicseréljük a megfelel? hiperbolikus függvényekre az összetev?ket és minden olyan tag el?jelét megváltoztatjuk, melyek két sh szorzatából állnak (speciálisan a sh^2-ek elé egy - jelet teszünk), akkor megkapjuk a hiperbolikus azonosságot. Lásd: *Osborne-szabály*.

Ezek f?leg határozott integráloknál adnak "http://wiki.math.bme.huszép"http://wiki.math.bme.hu eredményt

Példa.

$$\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Helyettesítéses integrálás

Az els? keresési eljárás az összetett függvény deriválási szabályának megfordításán alapul.

Tétel. Legyen g:I $\longrightarrow$ J, F: J $\longrightarrow$ **R** folytonosan differenciálható függvények és f: J $\longrightarrow$ **R** pedig olyan, hogy az F' = f, akkor az x $\longmapsto$ f(g(x)) $\cdot$ g'(x)-nek is létezik primitív függvénye és

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C$$

Bizonyítás. A primitív függvény létezését az garantálja, hogy az integrandus folytonos.

Elegend? ellen?rizni, hogy x $\longmapsto$ F(g(x)) primitív függvénye x $\longmapsto$ f(g(x)) $\cdot$ g'(x)-nek, azaz az el?bbi deriváltja az utóbbi:

$$F(g(x))' = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$$

QED.

...-alakú integrálok

Ebb?l a tételb?l származtathatjuk a "http://wiki.math.bme.hu**... alakú integrál**okat"http://wiki.math.bme.hu:

1. $$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (\ g(x) = ax+b \text{ esete})$$
2. $$\int g^n(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C \qquad (\ f(\,.\,) = (\,.\,)^n \text{ esete } n\neq -1)$$
3. $$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|g(x)| + C \qquad (\ f(\,.\,) = \ln(\,.\,) \text{ esete })$$

Példák.

1. $$\int \frac{x}{\cos^2(x^2+5)},\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\cos^2(x^2+5)},\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{tg}\,(x^2+5) + C$$ hiszen a "http://wiki.math.bme.huküls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\,.\,) = \frac{1}{\cos^2(\,.\,)} \qquad \to_\int \qquad F(\,.\,) = \mathrm{tg}\,(\,.\,)$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x) = x^2 + 5 \qquad \to' \qquad g'(x) = 2x$$

2.

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int (\operatorname{arc\,tg} x)^1 \cdot \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{arc\,tg}^2 x}{2} + C$$

hiszen a "http://wiki.math.bme.huküls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\,.\,) = (\,.\,)^1 \qquad \to_{\int} \qquad F(\,.\,) = \frac{(\,.\,)^2}{2}$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x) = \operatorname{arc\,tg} x \qquad \to' \qquad g'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

3.

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\arcsin x| + C$$

hiszen a "http://wiki.math.bme.huküls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\,.\,) = (\,.\,)^{-1} \qquad \to_{\int} \qquad F(\,.\,) = \ln|\,.\,|$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x) = \arcsin x \qquad \to' \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.

$$\int x^2\,\sqrt[2008]{\operatorname{sh} x^3}\cdot\operatorname{ch}(x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sqrt[2008]{\operatorname{sh} x^3}\cdot(3x^2\operatorname{ch}(x^3))\,\mathrm{d}x = \frac{2008}{3\cdot 2009}(\operatorname{sh} x^3)^{\frac{2009}{2008}} + C$$

hiszen a "http://wiki.math.bme.huküls?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$f(\,.\,) = (\,.\,)^{\frac{1}{2008}} \qquad \to_{\int} \qquad F(\,.\,) = \frac{2008}{2009}(\,.\,)^{\frac{2009}{2008}}$$

a "http://wiki.math.bme.hubels?"http://wiki.math.bme.hu függvény:

$$g(x) = \operatorname{sh}(x^3) \qquad \to' \qquad g'(x) = 3x^2\operatorname{ch}(x^3)$$

Integrálás a helyettesítés elvégzésével

Megjegyzés. Intermezzóként megemlítjük, hogy a helyettesítés elnevezés abból fakad, hogy ekkor lényegében új ismeretlent vezetünk be. Persze az ezzel való számolás egy egészen más szemléletet igényel. A f? képlet ekkor:

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u\Big|_{u=u(x)} = F(u)+C|_{u=u(x)}$$

ahol el kell végezni az

$$\begin{array}{lcl} u=u(x) & \to^{(\,.\,)^{-1}} & x=x(u) \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u'(x) & \to & \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{u'(x(u))} \end{array}$$

szimbolikus helyettesítést.

5. (exponenciális helyettesítés)

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\begin{array}{lcl} u=e^x & \to^{(\,.\,)^{-1}} & x=\ln u \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=e^x=u & \to & \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{u} \end{array}$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{{}^1\cancel{u}}{1+u^2}\cdot\frac{1}{\cancel{u}_1}\,\mathrm{d}u\Big|_{u=e^x} = \operatorname{arc\,tg}(u)+C|_{u=e^x} = \operatorname{arc\,tg}(e^x)+C$$

5. (gyökös helyettesítés)

$$\int \frac{2x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\begin{array}{lcl} u=\sqrt{x} & \to^{(\,.\,)^{-1}} & x=u^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2u} & \to & \mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u \end{array}$$

$$\int \frac{2x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2u^2}{1+u}\,\frac{1}{2u}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u = \int \frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}u =$$

$$\int \frac{u+1-1}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int 1-\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = u-\ln|1+u|+C|_{u=\sqrt{x}} = \sqrt{x}-\ln\sqrt{x}+C$$

6. (trigonometrikus helyettesítés)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$u = \arccos x \qquad \to^{(\,.\,)^{-1}} \qquad x = \cos u$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\sin u \qquad \to \qquad \mathrm{d}x = -\sin u\,\mathrm{d}u$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\cos^2 x}\,(-\sin u)\mathrm{d}u = -\int \sin^2 u\,\mathrm{d}u =$$

$$-\int \frac{1-\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u) + C\bigg|_{u=\arccos x} = -\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{4}\sin(2\arccos$$

Parciális integrálás

A helyettesítéses integrálás a függvénykompozíció deriválására szolgáló képlet felhasználása volt primitívfüggvény keresésre. Most a szorzási szabályt fogjuk használni.

Tétel. Legyen f,g:[a,b] $\longrightarrow$ **R** folytonos és F,G:[a,b] $\longrightarrow$ **R** differenciálható olyan, hogy F' = f, G' = g. Ekkor az alábbi képletben szerepl? összes integrandusnak létezik primitív függvénye és

$$\int Fg = FG - \int fG$$

Bizonyítás. Elég a bizonyítani, hogy a jobb oldal deriváltja a baloldali integrandus. Ehelyett egy kicsit másként csináljuk: belátjuk, hogy az FG függvény primitívfüggvénye az fG + Fg függvénynek, majd kefejezzük vel?le a fenti formula baloldalát:

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$$

tehát

$$FG = \int fG + Fg = \int fG + \int Fg$$

amib?l már következik a fenti formula. QED.

Polinom szor exp, trig, hip

Az els? alkalmazás az, amikor a egymás után parciális integrálásokkal polinommentes formulává alakítjuk az integrandust. Ekkor a fenti képlet F-je a polinom, amib?l egyel alacsonyabb fokú polinomszoros integrandus keletkezik az fG integrál esetén.

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$$

Hiszen

$$F = \mathrm{id} \qquad \to' \qquad f = F' = 1$$

$$g = \sin \qquad \to^{\int} \qquad G = \int g = -\cos$$

Egy hasonló:

$$\int (2x+1)\mathrm{sh}\,(3x-2)\,\mathrm{d}x = (2x+1)\frac{1}{3}\mathrm{ch}\,(3x-2) - \int 2 \cdot \frac{1}{3}\mathrm{ch}\,(3x-2)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2x+1}{3}\mathrm{ch}\,(3x-2) - \frac{2}{9}\mathrm{sh}\,(3x-2)$$

Hiszen

$$F = 2\mathrm{id} + 1 \qquad \to' \qquad f = F' = 2$$
$$g = \mathrm{sh} \circ (3\mathrm{id} - 2) \qquad \to^{\int} \qquad G = \int g = \frac{1}{3}\mathrm{ch} \circ (3\mathrm{id} - 2)$$

Rekurziós integrálok, formulák

1.

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$$

az

$$F = \ln \qquad \to' \qquad f = F' = \frac{1}{\mathrm{id}}$$
$$g = \frac{1}{\mathrm{id}} \qquad \to^{\int} \qquad G = \int g = \ln$$

szereposztással. A formulában visszatért a keresett integrál, így ezt kifejezve:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln x + C$$

2.

$$\int \cos(x) \cdot e^x\,\mathrm{d}x = \cos(x) \cdot e^x - \int (-\sin x) \cdot e^x\,\mathrm{d}x = \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x - \int \cos(x) \cdot e^x\,\mathrm{d}x$$

amib?l

$$\int \cos(x) \cdot e^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x) + C =$$

tehát kétszeri parciális integrálással értük el.

3. Rekurziós formulát kapunk az alábbi I_n alakú integrálokra:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^n} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$$

az utolsó tagot parciálisan integráljuk ki:

$$= \frac{1}{2}\int x\frac{2x}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{}{(n-1}$$

azaz I_n kifejezhet? I_{n-1}-segítségével.

Inverzfüggvények integrálja

Az

$$\int f^{-1} = \int f^{-1}\cdot 1 = f^{-1}\cdot \mathrm{id} - \int \mathrm{id}\cdot (f^{-1})'$$

trükk sokszor alkalmas arra, hogy az inverz függvények integrálját parciálisan kiintegráljuk, hiszen az inverz függvények deriváltjának képlete az utolsó tényez?t a kezünkre játssza. Speciálisan a módszer alkalmas az összes ln, arc és ar függvény kiintegrálására.

1.

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = \int \arcsin(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x = x\cdot\arcsin(x) - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\cdot\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$