<Matematika A1a 2008

A vektoralgebra felépítésére vonatkozóan lásd: (pdf)

Tartalomjegyzék

Vektorok

Irányított egyenes szakaszok között definiálunk egy "http://wiki.math.bme.huazonosság"http://wiki.math.bme.hu relációt, lényegben azzal, hogy az egyenl? nagyságú, egymással párhuzamos, azonos irányú egyenes szakaszokat azonosnak vesszük. Egymással azonosok egy halmazát nevezzük vektornak, elemeit a vektor egy reprezentánsának. Jelben: ha **a** vektor, akkor

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$$

jelöli, hogy $\overrightarrow{AB}\in\mathbf{a}$.

Az **a** vektor *hossza*

$$|\mathbf{a}|$$

nem más, mint mely bármely reprezentánsának hossza.

Nullvektor az aminek a hossza 0.

Két vektor *párhuzamos*:

$$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$$

ha van egy-egy reprezentánsuk, melyek egyenese párhuzamos. **0** || **a** minden **a** vektorra definíció szerint.

Két párhuzamos vektor *azonos állású* vagy *irányítású*

$$\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$$

ha a reprezentánsaik azonos irányításúak; a **0** mindennek azonos irányú. Ellenkez? esetben:

$$\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}$$

Tétel. **a** = **b**, akkor és csak akkor, ha

1. |**a**| = |**b**| és

2. **a** || **b** és
3. $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$

Vektorm?veletek

Összeadás, számmal való szorzás

Összeadás. Legyen **a** és **b** két vektor és $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ rendre a két vektor azonos kezd?pontból felmért reprezentánsa, legyen továbbá PACB paralelogramma (P-vel szemközt: C). Ekkor **a** + **b** vektor definíció szerint az a **c** vektor, melyet $\overrightarrow{PC}$ reprezentál.

Kivonás: **a** - **b** $=_{\mathrm{def}}$ **a** + (-**b**)

Az **a** *ellentett vektora* az a -**a** vektor, melyre |-**a**| = |**a**|, $\mathbf{a} \uparrow\downarrow (-\mathbf{a})$.

(Olyan tulajdonságú, mint a valós számok összeadása: kommutatív, asszociatív, **0** -t bármihez adva, amaz nem változik, ellentettjét a vektorhoz adva **0**-t kapunk.)

Számmal való szorzás. Legyen **a** vektor,   valós szám. Ekkor

$|\lambda.\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$,
$\lambda.\mathbf{a} \parallel \mathbf{a}$,
$\lambda.\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$, ha   > 0 és $\lambda.\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$, ha   < 0

(Széttagolja a valós és a vektorösszeget, felcserélhet? a valós szorzással, az 1-gyel való szorzás azonos az identitással.)

1. Feladat. ABCDEF egy szabályos hatszög. Fejezzük ki az **a** = $\overrightarrow{AB}$ és **b** = $\overrightarrow{AF}$ vektorok összegével/számszorosával a

$\overrightarrow{ED}$
$\overrightarrow{DE}$
$\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{BE}$

vektorokat!

Skaláris szorzás

Az **a** és **b** vektorok *skaláris szorzata* az

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =_{\mathrm{def}} |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$$

szám.

(Széttagolja az összeget, felcserélhet? a számmal való szorzással (mindkét változójában)).

e egységvektor, ha |**e**| = 1.

Geometriai tulajdonsága.

1. Ha **e** egységvektor, akkor **v** · **e** a **v**-nek az **e** egyenesére es? mer?leges vetületének el?jeles hossza.
2. **a**, **b** nem nullvektorok, akkor
$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$$

2. Feladat. Legyen ABCD egy téglalap, melynek AB oldala 5 egység, AD oldala 4 egység. Legyen **a** az $\overrightarrow{AB}$ irányú egységvektor, és **b** az $\overrightarrow{AD}$ irányú egységvektor. Legyen továbbá E az AD felezéspontja, G az AB B-hez közelebbi ötödöl?pontja és az egyel beljebbi az F. Igazolja, hogy GE mer?leges FC-re!

Vektoriális szorzás

Az **a** és **b** térvektorok *vektoriális szorzata* az a **c** = **a** × **b** vektor, melyre

1. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| =_{\mathrm{def}} |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$
2. mer?leges az **a** és **b** által kifeszített síkra,
3. irányítása olyan, hogy (**a**, **b**, **a** × **b**) ilyen sorrendben *jobbrendszert* alkot, azaz a jobb kéz hüvelyk, mutató és középs? ujját kifeszíthetjük "http://wiki.math.bme.hufájdalommentesen"http://wiki.math.bme.hu úgy, hogy rendre a **a**, **b**, **a** × **b** vektorok irányát kapjuk.

Széttagolja az összeget, felcserélhet? a számmal való szorzással, de nem asszociatív és nem kommutatív, bár antikommutatív, azaz a szorzat ellenkez?jébe megy át a két tényez? felcserélésével kapott szorzat.

Geometriai tulajdonsága.

1. |**a** × **b**| az **a** és **b** által kifeszített paralelogramma területe.
2. $\mathbf{a}\,||\,\mathbf{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$

3. Feladat. Legyen ABC háromszög, S a súlypontja, F az AB felezéspontja. Határozzuk meg, hogy az ABC háromszög területének hanyadrésze az AFS háromszog területe.

vagy

Igazoljuk, hogy az egyenl?szárú háromszög magassága felezi az alapot!

4. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}\\ \mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{d}\end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}-\mathbf{d}\,||\,\mathbf{b}-\mathbf{c}$$

Házi feladatok

1. Igazolja, hogy az paralelogramma átlóinak felez?pontjai egybeesnek!
2. Igaz-e:
    1. ha **ab** = 0, akkor **a** és **b** közül legalább az egyik nulla.
    2. ha **ab** = **ac**, és **a** ≠ **0**, akkor **b** = **c**
    3. ha **ab** = **ac**, akkor vagy **b** - **c** || **a**, vagy **b** - **c** $\perp$ **a**
3. Igaz-e:

1. ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor **a** és **b** közül legalább az egyik nulla.
2. ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}$, és $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b} = \mathbf{c}$
3. ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}$

4.
1. Igazolja a Thalész-tételt (azaz, hogy ha egy szakasz fölé, mint átmér? fölé kört rajzolunk, akkor a kör bármely (szakaszon kívüli) pontjából a szakasz két végpontja derékszög alatt látszik)!
2. Igazolja a koszinusztételt, azaz hogy az a,b,c oldalú háromszögben (a c-hez tartozó szög)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$