<Matematika A1a 2008

Tartalomjegyzék

Koordináta reprezentációk

*Lineáris kombináció*nak nevezzük a

$$\lambda_1.\mathbf{a}_1 + \lambda_2.\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_n.\mathbf{a}_n$$

alakú kifejezéseket, ahol a -k számok, az **a**-k vektorok.

Tétel.

1. Ha $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ két nempárhuzamos vektor a síkban, akkor a sík minden vektora egyértelm?en el?áll ezek lineáris kombinációjaként:
   $$\mathbf{v} = \lambda_1.\mathbf{b}_1 + \lambda_2.\mathbf{b}_2$$
2. Ha $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$ három, nem egy síkban lév? vektor, akkor a tér minden vektora egyértelm?en el?áll ezek lineáris kombinációjaként:
   $$\mathbf{v} = \lambda_1.\mathbf{b}_1 + \lambda_2.\mathbf{b}_2 + \lambda_3.\mathbf{b}_3$$

Síkban két nempárhuzamos vektor halmazát, térben három nem egysíkban lév? vektor halmazát *bázis*nak nevezünk. Ha ezek egységhosszúságúak és páronként mer?legesen egymásra, akkor *ortonormált* bázist alkotnak. A *jobbsodrású* (v.ö.: jobbcsvarszabály) ortonormált bázis a térben az (**i**, **j**, **k**).

Egy **v** térvektornak B = ($\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$) bázisra vonatkozó *koordinátareprezentációja* az az oszlopmátrix, melynek elemei rendre az el?z? tételbeli egyértelm?en létez? -k:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}$$

A vektorm?veletek a koordinátareprezentációban a következ?k lesznek.

$$[\mathbf{a}+\mathbf{b}] = \begin{bmatrix}a_1+b_1\\ a_2+b_2\\ a_3+b_3\end{bmatrix}, \qquad [\lambda.\mathbf{a}] = \begin{bmatrix}\lambda\cdot a_1\\ \lambda\cdot a_2\\ \lambda\cdot a_3\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \qquad [\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ -a_1b_3 + b_1a_3 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{bmatrix}$$

Külön fontos a vektoriális szorzat esetén megemlíteni a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

"http://wiki.math.bme.huszimbolikus"http://wiki.math.bme.hu determinánssal történ? kiszámolási módot és a skaláris szorzást, mint mátrixszorzást:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{ab}$$

Egyenes

Legyen $\mathbf{r}_0$ az *e* egyenes egy pontjának helyvektora, $\mathbf{v}$ az irányvektora. Ekkor az egyenes bármely $\mathbf{r}$ pontja el?áll (alkalmas *t* valós paraméterrel)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\cdot\mathbf{v}$$

alakban, hiszen az $\mathbf{r}$ - $\mathbf{r}_0$ vektor párhuzamos az egyenessel (s?t: az egyesben van), így a $\mathbf{v}$ irányvektor skalárszorosa. A *t* jelölés az "http://wiki.math.bme.huid?re"http://wiki.math.bme.hu utal. Ha feltételezzük, hogy egy pont sebessége az egyenesen $\mathbf{v}$, akkor *t* azt jelenti, hogy az $\mathbf{r}_0$-végpontjából az $\mathbf{r}$ végpontjába mennyi id? alatt jutunk el.

Nulladik pl.

0. Legyen ABC egy háromszög, melynek körül írható körének középpontjából a csúcsokhoz men? vektorok: **a**, **b**, **c**. Igazoljuk, hogy a magasságok egy pontban, az **m = a + b + c** pontban metszik egymást.

Egyenletrendszer

A fenti egyenletet az *e* egyenes **paraméteres vektoregyenlet**ének nevezzük. Ha felírjuk koordinátareprezentációban, akkor a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ vagyis a } \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk, melyet az *e* egyenes **paraméteres egyenletrendszer**ének nevezünk. Persze itt $[\mathbf{r}_0]=(x_0,y_0, z_0)$, $[\mathbf{r}]=(x,y, z)$ és $[\mathbf{v}]=(v_1,v_2, v_3)$.

1. Feladat. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, mely mer?leges mind az *e*, mind az *f* egyenesre és áthalad a P_0 = (1,2,0) ponton.

$$e:\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-2t \\ z = 8 \end{cases} \quad \text{és} \quad f:\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 4 \\ z = 2-t \end{cases}$$

Megoldás. Olvassuk le az irányvektorokat! $\mathbf{v}_e$ = (3,-2,0) és $\mathbf{v}_f$ = (2,0,-1). Ezekre mer?leges vektort vektoriális szorzattal készítünk:

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Azaz:
$$g:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 4t \end{cases}$$

Két egyenes kölcsönös helyzetével kapcsolatban a következ? lehet?ségek vannak:

e | | *f* (ennek kritériuma $\mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f = \mathbf{0}$) ekkor

vagy egybeesnek (amikor is van közös pontjuk),
vagy különböz?ek (ha nincs)

$e \nparallel f$ (ennek kritériuma $\mathbf{v}_e \times \mathbf{v}_f \neq \mathbf{0}$) ekkor:

vagy metsz?ek (amikoris van közös pontjuk),
vagy kitér?ek (ha nincs)

2. Feladat. Határozzuk meg az

$$e:\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = -t \\ z = 1-2t \end{cases} \quad \text{és} \quad f:\begin{cases} x = 2t-3 \\ y = -1 \\ z = 3t+9 \end{cases}$$

egyenletrendszerekkel megadott egyenesek kölcsönös helyzetét!

Megoldás. Két egyenes pontosan akkor párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak. Ezek: (3,-1,-2) és (2,0, 3), azaz biztosan nem párhuzamosak, mert a komponens, amelyik 0, nem áll el? nemnullák szorzataként. Közös pontot az egyenletrendszer megoldásával találhatunk (ha egyáltalán van).

$$\begin{cases} 3t+2 = 2u-3 \\ -t = -1 \\ 1-2t = 3u+9 \end{cases}$$

három egyenlet, két ismeretlen, ezért a feladat túlhatározott, azaz általában nincs megoldása. Most tényleg nincs, mert ha t=1, akkor 3u=-10 és 2u=8, ami lehetetlen.

Sík

Legyen $\mathbf{r}_0$ az *s* sík egy pontjának helyvektora, **n** a normálvektora, azaz egy olyan nemnulla vektor, mely mer?leges a síkra (azaz a sík minden pontjára mer?leges). Ekkor a sík bármely **r** pontjára igaz lesz:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0$$

hiszen az $\mathbf{r}$ - $\mathbf{r}_0$ vektor mer?leges a sík mormálvektorára, így skaláris szorzatuk 0.

Ha felírjuk koordinátákkal, ahol legyen **n** = (A,B,C), akkor az

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

egyenlehez jutunk, melyet az *s* sík egyenletének nevezünk.

3. Feladat. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely áthalad a P = (3,0,1) ponton és párhuzamos az *e* és *f* egyenesek által kifeszített síkkal, ha van ilyen.

$$e:\begin{cases}x=1-2t\\ y=2+t\\ z=-2t\end{cases}\quad \text{és} \quad f:\begin{cases}x=-2+2t\\ y=-t\\ z=2t\end{cases}.$$

Megoldás. Olvassuk le az irányvektorokat! $\mathbf{v}_e$ = (-2,1,-2) és $\mathbf{v}_f$ = (2,-1,2). A sík számára normálvektort úgy kapunk, ha ezekre mer?leges vektort készítünk:

$$\mathbf{v}_e\times\mathbf{v}_f=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-2&1&-2\\2&-1&2\end{vmatrix}=0.\mathbf{i}+0.\mathbf{j}+0.\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

ami azonban nem alkalmas normálvektornak. Világos, hogy ez a jelenség amiatt lépett föl, mert a két egyenes párhuzamos egymással. Készítsünk tehát a síkjukban lév? nempárhuzamos vektorokat!

Az *e*-n egy pont az A = (1,2,0), az *f*-en: B = (-2,0,0), melyek a *t* = 0 értékadás által lettek kiválasztva. Legyen **u** az *A*-ból *B*-be men? vektor, mely a (-3,-2,0). Ekkor jó lesz normálvektornak a

$$\mathbf{n}=\mathbf{v}_e\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-2&1&-2\\-3&-2&0\end{vmatrix}=-4.\mathbf{i}+6.\mathbf{j}+7.\mathbf{k}$$

A sík így:

$$s:\quad -4(x-3)+6y+7(y-1)=0$$

4. Feladat. Írjuk fel az alábbi egyenletekkel megadott síkok metszésvonalának egyenletét!

$$s_1:\quad x-y-4z-5=0$$

$$s_2 : \quad 2x + y - 2z - 4 = 0$$

Megoldás. A metszésvonal pontjai kielégítik mindkét egyenletet, így az összegüket is:

$$s : \quad 3x - 6z - 9 = 0 \text{ illetve } x - 2z - 3 = 0$$

Most gyakorlatilag azt csináltuk, hogy felírjuk az $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ normálvektorú, a metszésvonalon áthaladó sík egyenletét. Ha keresünk ezen egy olyan pontot, mely az s_1-en is rajta van, akkor találtunk egy közös pontot. Kett? ilyen kéne. Válasszuk ki például a $z = t$ síkon egy s-beli pontot, ehhez ugyanis ekkor

$$x = 2t + 3$$

tartozik. Ehhez pedig az s_1 miatt:

$$y = 2t + 3 - 4t - 5 = -2t - 2$$

De t helyett bármi állhat, így megkaptuk a metszésvonal összes pontját:

$$e : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

ahol a paraméter a $z = t$.

5. Feladat. Tükrözzük a P = (4,-3,5) pontot az s: $x - y + z - 6 = 0$ egyenlet? síkra!

Megoldás. A P-b?l s-re bocsátott mer?leges D döféspontját kell meghatározni, majd kiszámítani a **p** + 2.(**d**-**p**) vektort. Az s-re mer?leges e egyenes irányvektora nem más, mint a sík normálvektora:

n = (1,-1,1)

így a P adott ponttal:

$$e : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 - t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

A döféspont ennek a sík egyenletébe helyettesítésével adódik:

$$4 + t - (-3 - t) + 5 + t - 6 = 0$$

innen:

6t=-6 és t=-1

Ekkor a döféspont koordinátáit a t=-1 helyettesítéssel nyerjük az egyenletrendszerb?l: D = (3,-2,4)

P' = **p** + 2.(**d**-**p**) = (4,-3,5) + 2.(-1,1,-1)=(2,-1,3)

6. Feladat. Határozzuk meg annak az *e* egyenesnek az egyenletét, mely illeszkedik a P = (-1,2,3) pontra, mer?leges az **a** = (6,-2,-3) vektorra és metszi az

$$f:\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 2t-2 \\ z = -4t+3 \end{cases}$$

egyenest.

Megoldás. Tudjuk, hogy vektor akkor és csak akkor mer?leges egy síkra, ha a sík minden egyenesére mer?leges. Ha tehát felírjuk az **a** normálvektorú, P-n áthaladó *s* síkot, akkor abban benne lesz *e*. Hogy merre lesz, azt f árulja el, mert ahol döfi a síkot *f*, ott lesz *e* és *f* metszéspontja. Ez azért van, mert *e* rajta van *s*-en, így metszéspontja *f*-fel szintén *s*-ben van. Ám, pont ebben a pontban döfi *f* az *s*-t.

f paraméteres egyenletrendszere:

$$f:\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 2t-2 \\ z = -4t+3 \end{cases}$$

s egyenlete:

$$6(x+1)-2(y-2)-3(z-3)=0$$

A döféspont:

$$\begin{aligned} &6(2t+2)-2(2t-4)-3(-4t)=0 \\ &12t+12-4t+8+12t=0 \\ &t=-1 \end{aligned}$$

Azaz D = (-1,-3,7).

e irányvektora a PD vektor: (0,-5,4)

e paraméteres egyenletrendszere:

$$e:\begin{cases} x=-1 \\ y=-5t-2 \\ z=4t+3 \end{cases}$$

Házi feladatok

1. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, mely tartalmazza az e: x=1-2t, y=2+t, z=-1-t egyenletrendszer? egyenest és a P = (0,1,-2) pontot!
2. Határozza meg a 3x+2y-z=3 és x-y+3z=1 egyenlet? síkok metszésvonalával párhuzamos, a P = (1,2,3) ponton áthaladó egynenes egyenletét.

További feladatok. A megoldásoknál ajánlott a (pdf) segédlet utolsó oldalát áttanulmányozni.

1. Határozzuk meg a 2. és 3. feladatban említett egyenespárok távolságát!
2. Határozzuk meg a 2. feladatban említett egyenespárok szögét!
3. Határozzuk meg a 4. feladatban említett síkpárok szögét!
4. Határozzuk meg az 5. feladatban említett *P* és *s* távolságát!
5. Határozzuk meg a 4. feladatban említett síkpárok esetén az "http://wiki.math.bme.hus_1 + s_2"http://wiki.math.bme.hu és a z irányba 5-tel eltolt másának távolságát!