

Tartalomjegyzék

- 1 Bevezetés
- 2 Komplex számok
 - ♦ 2.1 A számkör és a műveletek
 - ♦ 2.2 Imaginárius egység, valós és képzetes rész
 - ♦ 2.3 Konjugált
- 3 Geometriai interpretáció
- 4 Feladatok
 - ♦ 4.1 Algebrai alakkal

Bevezetés

Mielőtt a komplex számokra rátérnénk nézzünk példát olyan számkörben való számolásra, mely bár még kommutatív, de eltérést mutat a megszokott számkörökben történő számolástól.

Legyen $\mathbf{Z}_{13}$ az egész számok 13-mal történő osztása maradékainak halmaza. Eszerint a fenti halmaz lényegében a következő:

$$\mathbf{Z}_{13} = \{0, 1, 3, \dots, 11, 12\}$$

Például $\mathbf{Z}_{13}$ -ban

$$3 \cdot 5 = 2$$

abban az értelemben, hogy 13-mal 3-mat maradékul adót 5-öt maradékul adóval szorozva 2-t maradékul adót kapunk. Azért a félreértések elkerülése érdekében a fenti egyenlőséget így jelöljük:

$$3 \cdot 5 \equiv 2 \pmod{13}$$

Vagy egy másik érdekes példa: milyen $x \in \mathbf{Z}_{13}$ -beli esetén lesz

$$2 \cdot x \equiv 1 \pmod{13}$$

Világos, hogy ez nem az $1/2$, mert az nem egész. Csak 13 lehetőséget kell kipróbálnunk, hogy megtudjuk, van-e és ha igen, mi lesz:

$$x = 7.$$

1. Feladat. Oldjuk meg $\mathbf{Z}_{13}$ -ban a következő egyenletet:

$$x^2 + 1 = 0$$

Megoldás. Ez egy másodfokú egyenlet (és a számkör egy kommutatív test, ahol használható a megoldóképlet), így:

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{2} \equiv \frac{\pm \sqrt{9}}{2} \equiv \pm 3 \cdot 7 \equiv \begin{cases} 8 \\ 5 \end{cases}$$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy ezek valóban megoldások. (Megjegyezzük, hogy a fenti gondolatmenet ebben a formájában csak egy intuitív gondolat kísérlet, ám utánagondolva módszertanilag szigorú bizonyítássá tehető.)

Komplex számok

A komplex számok halmazát is maradékos osztással rendelkező halmazból konstruáljuk: a valós együtthatós polinomok $\mathbf{R}[X]$ halmazából. Közismert, hogy a valóseyűtthatós, egyhatározatlanú polinomokkal, azaz a

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

alakú kifejezésekkel, ahol az a -k valós számok, n pedig nemnegatív egész, lehet maradékosan osztani.

Példa. Mi az $(x^3+8):(x+2)$ osztás maradéka?

A számkör és a műveletek

A komplex számok halmazát egy a maradékos osztással rendelkező halmazból konstruáljuk: a valós egyűtthatós polinomok $\mathbf{R}[X]$ halmazából:

$$\mathbf{C} =_{\text{def}} \mathbf{R}[X]/(x^2 + 1)$$

azaz a komplex számok halmaza a valóseyűtthatós polinomok x^2+1 polinommal történő osztási maradékai. Világos, hogy minden ilyen maradék eláll

$$m(x) = a + bx$$

alakban, azaz legfeljebb elsőfokú polinom alakjában. Ebben a számkörben az *összeadás* a polinomösszeadás, a *szorzás* a polinomok szorzása (illetve ezen eredményének x^2+1 -vel történő osztási maradéka). Amikor két elsőfokú polinom szorzata másodfokú, akkor sem lépünk ki a számkörből, hisz a

$$m(x)^2 + 1 = 0$$

polinomegyenlet megoldható, és pedig az $m(x)=x$ polinom (az identitás) megoldás. Ekkor

$$m(x)^2 = -1$$

azaz ebben a számkörben létezik a -1-nek négyzetgyöke.

Immaginárius egység, valós és képzetes rész

A fenti egy annyira jellegzetes tulajdonsága a komplex számkörnek, hogy a benne lévő x -re másként hivatkozunk.

$$i$$

-vel jelöljük és az imaginárius egységnek nevezzük. Úgy számolunk vele, mint paraméterrel, vagy határozatlannal (x-szel), csak teljesül rá:

$$i^2 = -1$$

Ekkor

$$z \in \mathbf{C} \Leftrightarrow z = a + bi \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

itt a -t a z valós részének nevezzük és $\operatorname{Re}(z)$ -vel jelöljük, b -t a z képzetes részének nevezzük és $\operatorname{Im}(z)$ -vel jelöljük. Világos, hogy $\operatorname{Im}(z) \in \mathbf{R}$, azaz "http://wiki.math.bme.hutisza" "http://wiki.math.bme.hu valós.

A $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$ alakot a komplex szám kanonikus alakjának nevezzük.

1. Feladat. Adjuk meg az

$$\frac{i + 4}{2 - i}$$

számot kanonikus alakban:

Megoldás. Megjegyezzük, hogy a fenti osztás értelmes, mint ahogy nemnulla polinommal való maradékos osztás is az. Persze $z/0$ a komplexekben sem értelmezhet?

A nevezőben is van i , emiatt nem kanonikus alakú a szám.

"http://wiki.math.bme.hui-telenítsük" "http://wiki.math.bme.hu a nevezőt! Ezt hasonló módon tesszük, mint a (négyzet)gyöktelenítésnél, hiszen i úgy tekinthet, mint a -1 (egyik) négyzetgyöke:

$$\frac{i + 4}{2 - i} = \frac{(i + 4)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = *$$

itt felhasználjuk azt a múlhatatlanul fontos azonosságot, hogy:

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

$$* = \frac{(i + 4)(2 + i)}{2^2 - i^2} = \frac{(i + 4)(2 + i)}{4 + 1} = \frac{1}{5}(2i - 1 + 8 + 4i) = \frac{1}{5}(7 + 6i) = \frac{7}{5} + i\frac{6}{5}$$

Konjugált

A fenti példa rámutat a konjugált hasznosságára, mely a következő:

$$\text{ha } z = a + bi \in \mathbf{C}, \text{ akkor } \bar{z} = a - bi.$$

Például kifejezhet a konjugáltal az reciprok. Ha $z \neq 0$, akkor

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

itt $z\bar{z}$ mindig nemnegatív, hiszen

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Ennek a kifejezésnek az alakja vezet el a komplex számok geometriai képéhez.

Geometriai interpretáció

Minthogy

$$z \in \mathbf{C} \quad \leftrightarrow \quad z = a + bi \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

azaz a komplex számot egyértelműen meghatározza a valós és képzetes része, így a koordinátasík minden pontja kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozható a komplex számok halmazával.

Ekkor a "http://wiki.math.bme.huhozzáadás" http://wiki.math.bme.hu az eltolás. A konjugálás az "http://wiki.math.bme.huRe" http://wiki.math.bme.hu-tengelyre tükrözés. Innen következik, hogy konjugálás invariáns az összeadásra (sőt a szorzásra is). Az komplex szám hossza az eltolás vektor hossza:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Ez egyben abszolútérték is, azaz $|zw| = |z||w|$. A szorzás Ha z egy egységnyi abszolútértékű komplex szám, akkor nyilván:

$$z = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

amelyet még

$$e^z$$

-vel is jelölünk. A valóssal való szorzás miatt egy r hosszúságú komplex szám:

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Feladatok

Algebrai alakkal

2. Feladat. Oldjuk meg a

$$z^3 + 2z^2 + 5z = 0 \quad (\mathbf{C} \ni z = ?)$$

egyenletet a komplex számok halmazán!

3. Feladat. Oldjuk meg a

$$z\bar{z} = z^3 \quad (\mathbf{C} \ni z = ?)$$

egyenletet a komplex számok halmazán!

4. Feladat. Oldjuk meg a

$$3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i \quad (\mathbf{R}^2 \ni (x, y) = ?)$$

egyenletet a valós számpárok halmazán (azaz x és y valós ismeretlenek)!