<Matematika A1a 2008

Tartalomjegyzék

Konvergencia

Definíció ? *Konvergens sorozat* ? Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozat konvergens, ha létezik olyan *A* **R** szám, hogy minden pozitív szám esetén megadható olyan *N* természetes szám, hogy minden az *N*-nél nagyobb vagy egyenl? *n* természetes számra |a_n - *A*| < . Illetve szimbolikusan:

$$\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - A| < \varepsilon$$

Példák. Az $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{2}{3n+4}\right)$, $\left(\frac{3}{n^2}\right)$ sorozatok konvergensek.

Feladat. Konvergens-e az $a_n = \frac{5n+2}{2n+7}$ általános tagú sorozat?

(Útmutatás: képezzük az |a_n - 5/2| *különbséget és becsüljük felül egy 1/n szer? sorozattal, ebb?l az el?z? példa gondolatmenetével következtessünk vissza az -hoz szükséges* N*-re.)*

Konvergens, ugyanis az *A* = 5/2 olyan szám, hogy a sorozatnak az *A* minden környezetén kívül csak véges sok tagja van. A konvergensséget (a definíció alapján) a következ?képpen látjuk be. Rögzítsünk tetsz?legesen egy pozitív számot. Legyen egyel?re *n* tetsz?leges természetes szám, és vizsgáljuk meg, hogy az |a_n - *A*| szám felülbecsülhet?-e olyan sorozattal, melynek infimuma a 0. A becsléshez

$$\left|\frac{5n+2}{2n+7} - \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{2(5n+2) - 5(2n+7)}{2\cdot(2n+7)}\right| = \left|\frac{10n + 4 - 10n - 35)}{2\cdot(2n+7)}\right| =$$

$$\left|\frac{-31}{2\cdot(2n+7)}\right| = \frac{31}{2\cdot(2n+7)}$$

Ahol az utolsó lépésben kapott eredményr?l kell igazolnunk, hogy egy *N* indext?l kezdve -nál kisebb. Ehhez oldjuk meg a

$$\frac{31}{2\cdot(2n+7)} < \varepsilon$$

egyenl?tlenséget! Reciprokot véve mindkét oldalon (és a reláció érvényességének fenntartására figyelve)

$$2 \cdot (2n+7) > \frac{31}{\varepsilon}$$
$$n > \frac{\frac{31}{2\varepsilon} - 7}{2}$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden *n*-re, mely nagyobb az

$$r = \frac{\frac{31}{2\varepsilon} - 7}{2}$$

számnál, teljesül a kívánt -ra vonatkozó egyenl?tlenség. Azaz *N*-et választhatjuk akármilyen, az *r* valós számnál nagyobb természetes számra, mert akkor az $n > N$ természetes számokra biztosan igaz lesz a kívánt egyenl?tlenség. *r*-nél nagyobb *N* természetes szám pedig van, mert minden valós számnál van nagyobb természetes szám. Tehát összefoglalva, tetsz?leges pozitív számra, ha

$$n > N = \left[\frac{\frac{31}{2\varepsilon} - 7}{2} \right],$$

ahol [.] jelöli az ?egészrész?t, akkor

$$\left| \frac{5n+2}{2n+7} - \frac{5}{2} \right| < \varepsilon$$

Azok a *mértani sorozat*ok, melyek kvociensének abszolút értéke kisebb mint 1, a nullához konvergálnak. Pont emiatt ezeknél a sorozatoknál teljesen érdektelen, hogy mi az els? tagjuk ? rendszerint azt 1-nek választjuk.

Fekadat ? Ha $|q| < 1$, akkor (q^n) konvergens és $\lim(q^n) = 0$.

Az állítás legegyszer?bb (bár módszertanilag talán kifogásolható) bizonyítása, ha megkíséreljük a definíciót felírva megoldani a szokásos egyenl?tlenséget. Legyen pozitív szám és keresünk olyan *N*-et, hogy minden $n > N$-re

$$|q^n| < \varepsilon$$

teljesüljön. Ehhez oldjuk meg az alábbi egyenl?tlenséget *n*-re:

$$|q^n| = |q|^n < \varepsilon$$

Feltehet?, hogy *q* nem nulla, hiszen ekkor az azonosan nulla sorozattal van dolgunk. Vegyük a tizes alapú logaritmusát:

$$\lg |q|^n < \varepsilon$$
$$n \cdot \lg |q| < \varepsilon$$
$$n > \frac{\varepsilon}{\lg |q|}$$

hiszen negatív számmal osztva az egyenl?tlenség megfordul. Ezért ha *N*-et az el?z? egyenl?tlenség jobb oldalánál nagyobbra választjuk, akkor a nála nagyobb *n*-ekre bizonyosan igaz lesz a kívánt állítás.

Nullsorozatok vagy zérussorozatok

A numerikus sorozatok témakörében rendkívül hasznosan alkalmazhatóak azok a sorozatok, melyek határértéke a 0 szám. Ezeket nullsorozatoknak, vagy zérussorozatoknak nevezzük. Világos, hogy az (1/n) sorozat például nullsorozat.

Feladat

1. (a_n) pontosan akkor nullsorozat, ha (|a_n|) nullsorozat.
2. (a_n) pontosan akkor konvergens, ha (|a_n|) konvergens.

Az alábbi állítás lényegében az úgy nevezett *rend?relv* egy alakja, mellyel kés?bb foglalkozunk részletesebben.

Állítás ? *Majorálás nullsorozatokkal* ? Ha ($_n$) nullsorozat és az (a_n) sorozat olyan, hogy valamely *M*-re minden $n > M$ esetén

$$|a_n| \leq \delta_n \, ,$$

akkor (a_n) is nullsorozat.

Feladat.

1. $\sin(\frac{1}{n})$ nullsorozat
2. $\mathrm{tg}(\frac{1}{\mathrm{n}})$ nullsorozat

Az alábbi tétel az alkalmazások szempontjából különösen fontos.

Tétel ? *A ?korlátos szor nullához tartó? alakú sorozatok elve* ? Ha ($_n$) nullsorozat és az (a_n) korlátos sorozat olyan, akkor

$$(a_n \cdot \delta_n)$$

a nullához tart.

Feladat.

$$\frac{\sin(\frac{1}{n})}{n + \frac{1}{n}} \longrightarrow 0$$

Konvergencia, határérték és m?veletek

Konvergencia jellemzése nullsorozatokkal ? Az (a_n) sorozat pontosan akkor tart az *A valós szám*hoz, ha az (a_n - *A*) sorozat nullsorozat. Ezalapján a sorozatkonvergenciát vissza lehet vezetni a nullsotozatok vizsgálatára, amely megkönnyíti a sorozatok konvergenciája és a m?veletek közötti kapcsolat feltárását.

Definíció ? *Sorozatm?veletek mint pontonként definiált m?veletek* ? Legyen (a_n) és (b_n) valós számsorozat. Ekkor

1. $(a_n) + (b_n)$ vagy $(a_n + b_n)$
jelöli az a_n+b_n általános tagú sorozatot;
2. $(a_n) \cdot (b_n)$ vagy $(a_n \cdot b_n)$
jelöli az $a_n \cdot b_n$ általános tagú sorozatot;
3. ha (b_n) tagjai között csak véges sok 0 található, akkor
$\frac{(a_n)}{(b_n)}$ vagy $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$
jelöli az a_n/b_n általános tagú sorozatot;

Megjegyzések. Világos, hogy sorozatok különbségét nem feltétlenül szükséges külön definiálnunk, hiszen (a_n) - (b_n) sorozat tekinthet? úgy, mint a $(a_n) + (-1) \cdot (b_n)$ sorozat (ahol (-1) az azonosan -1 sorozat).

Tétel ? *A konvergencia és a határérték is invariáns az alapm?veletekre* ? Ha (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok, akkor

1. (a_n+b_n) is konvergens és
$$\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n)$$
2. $(a_n \cdot b_n)$ is konvergens és
$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$$
3. ha $\lim(b_n) \neq 0$, akkor (a_n/b_n) is konvergens és
$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}$$

Feladatok

1. Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az alábbi sorozatnak?

$$\left(\frac{2n^2 - 3n + 9}{2 + 4n - n^2}\right)$$

(Útmutatás: a számlálót és nevez?t osszuk le a nevez? legmagasabb fokú tagjával.)

$$\frac{2n^2 - 3n + 9}{2 + 4n - n^2} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2}}{\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} - 1} \to \frac{2 - 0 + 0}{0 + 0 - 1} = \frac{2}{-1} = -2$$

Hivatkozva a határérték és m?veletek kapcsolatára vonatkozó tételre.

Megjegyezzük, hogy polinomok hányados esetén, ha a számláló és a nevez? azonos fokszámú, akkor a hányados a számláló és a nevez? f?együtthatójának hányadosához tart.

2. Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az alábbi sorozatnak?

$$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

(Útmutatás: tekintsük törtnek és gyöktelenítsük a számlálóját.)

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$$

Ezzel kapcsolatban rámutatnánk az

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

azonosság múlhatatlan fontosságára, melyet az számlálóban alkalmaztunk az

$$A=\sqrt{n+1}$$
$$B=\sqrt{n}$$

szereposztásban.

3. Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke az alábbi sorozatnak?

$$\left(n^3\cdot(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$$

(Útmutatás: a második tényez?t tekintsük törtnek és gyöktelenítsük a számlálóját.)

$$n^3\cdot(\sqrt{n^4+1}-n^2)=n^2\cdot\frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{1}\cdot\frac{\sqrt{n^4+1}+n^2}{\sqrt{n^4+1}+n^2}=n^2\cdot\frac{(n^4+1)-n^4}{\sqrt{n^4+1}+n^2}=$$

$$=\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}+n^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1}\to\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Ezzel kapcsolatban rámutatnánk az

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

azonosság múlhatatlan fontosságára, melyet az számlálóban alkalmaztunk az

$$A=\sqrt{n^4+1}$$
$$B=n^2$$

szereposztásban.

Az Euler-féle példa

Az

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

általános tagú sorozat konvergens, mert igazolható módon monoton és korlátos.

Feladat. Konvergens-e az alábbi sorozat és ha igen, adjuk meg a határértékét!

$$\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^n$$

(Útmutatás: osszuk le a számlálót is és a nevez?t is n*-nel és alkalmazzuk mindkett?re az alkalmas nevezetes határértéket.)*

$$\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^n = \left(\frac{\dfrac{n+4}{n}}{\dfrac{n+3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n} \to \frac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^3} = \mathrm{e}$$