

## Tartalomjegyzék

- 1 Gyakorlás
- 2 Monoton, korlátos sorozatok
  - ♦ 2.1 Monoton sorozat
- 3 Rend?r elv
- 4 Részsorozatok, Bolzano?Weierstrass-féle kiválasztási tétel
- 5 Nevezetes határértékek
- 6 Végtelen határérték
  - ♦ 6.1 Határozatlan esetek

## Gyakorlás

### 1. Egyszer?sítse az alábbi kifejezéseket!

1.  $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = ?$
2.  $(A \cap B) \cup C = ?$ , ha  $A \subseteq C$ .

### 2. Oldja meg az alábbi halmazegyenleteket, $X$ -re!

1.  $(A - X) \cup B = \bar{X}$
2.  $A - X = X - A$

*Megoldás.*

1.1. Legyen  $D$  a feladatban szerepl? halmaz és legyen  $U = A \cup B \cup C$  a komplementerképzés alaphalmaza! Emeljünk ki  $A$ -t!

$$D = A \cap ((B \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (\bar{B} \cap \bar{C})) =$$

A második tényez? els? két tagjából kiemelhetünk  $B$ -t a második két tagjából  $B$  komplementert:

$$= A \cap ((B \cap (C \cup \bar{C})) \cup (\bar{B} \cap (C \cup \bar{C}))) =$$

ekkor a halmaz és komplementere kiadja  $U$ -t, így:

$$= A \cap ((B \cap U) \cup (\bar{B} \cap U)) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap U = A$$

Tehát  $D = A$ .

Vagy Boole-algebrai formalizmusban:

$$\begin{aligned} d &= abc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} = a(bc + \bar{b}c + b\bar{c} + \bar{b}\bar{c}) = a((b + \bar{b})c + (b + \bar{b})\bar{c}) = \\ &= a(1c + 1\bar{c}) = a(c + \bar{c}) = a \cdot 1 = a \end{aligned}$$

1.2.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = C \cap (B \cup C) = C$$

az elnyelési tulajdonság miatt és mert  $A \subseteq C$  pontosan azt jelenti, hogy  $A \cup C = C$ .

2.1. Legyen a komplementerképzés univerzuma  $U$ . Tegyük fel, hogy van megoldás. Eltűnik az  $X$  komplementer a bal oldalról, ha mindkét oldalt elmetsszük  $X$ -szel:

$$\begin{aligned} (A - X) \cup B &= X \\ (A \cap \overline{X}) \cup B &= X \\ ((A \cap \overline{X}) \cup B) \cap X &= X \cap X \\ (A \cap \overline{X} \cap X) \cup (B \cap X) &= X \\ (A \cap \emptyset) \cup (B \cap X) &= X \\ B \cap X &= X \end{aligned}$$

ez utóbbi pontosan azt jelenti, hogy  $X \subseteq B$ . Emellett a feltétel mellett  $B$ -vel a baloldalon "<http://wiki.math.bme.hu>"beírva "<http://wiki.math.bme.hu>:"

$$[X = ] \quad (A \cap \overline{X}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{X} \cup B) \supseteq (A \cup B) \cap (\overline{X} \cup X) = (A \cup B) \cap U = A \cup B$$

amiből következik, hogy  $B \subseteq X$  és  $A \subseteq X$ . Ez azt jelenti, hogy ha van megoldás, akkor az egyértelmű és pedig

$$X = B$$

Most vizsgáljuk meg a megoldhatóság feltételét. Azt kaptuk, hogy ha van megoldás, akkor  $A \subseteq X = B$ , vagyis

$$A \subseteq B$$

De ez elégséges feltétele is a megoldhatóságnak, ugyanis ekkor az  $X = B$  helyettesítés kielégíti az egyenletet:

$$(A \cap \overline{B}) \cup B = \emptyset \cup B = B$$

2.2.

$$A - X = X - A$$

vagyis

$$A \cap \overline{X} = X \cap \overline{A}$$

Ha van megoldás és bemetszünk mindkét oldalon  $A$ -val, akkor

$$\begin{aligned} A \cap A \cap \overline{X} &= X \cap \overline{A} \cap A \\ A \cap \overline{X} &= \emptyset \end{aligned}$$

azaz  $A \subseteq X$ , de az egyenlet *szimmetrikus* az  $A$  és az  $X$  felcserélésére, ezért  $X \subseteq A$  is teljesül, amiből  $X = A$ , ha van megoldás. Márpedig az egyenletet az  $X = A$  kielégíti.

## Monoton, korlátos sorozatok

A konvergencia alábbi, gyakran alkalmazott, *elégséges feltétele* a sorozatok monoton tulajdonságát helyezi előtérbe. Mindezekhez eleveítsük fel a monoton sorozat definícióját.

## Monoton sorozat

**Definíció** ? Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  valós számsorozat

1. **monoton növekvő**?, ha minden  $n$  természetes számra teljesül:

$$a_n \leq a_{n+1}$$

**szigorúan monoton növekvő**?, ha minden  $n$  természetes számra teljesül:

$$a_n < a_{n+1}$$

2. **monoton csökkenő**? vagy **monoton fogyó**, ha minden  $n$  természetes számra teljesül:

$$a_{n+1} \leq a_n$$

**szigorúan monoton csökkenő**?, ha minden  $n$  természetes számra teljesül:

$$a_{n+1} < a_n$$

3. **monoton**, ha monoton növekvő? vagy monoton csökkenő?

4. **szigorúan monoton**, ha szigorúan monoton növekvő? vagy szigorúan monoton csökkenő?

**Megjegyzés.** A monotonitást, például a szigorú monoton növekedést még úgy is megfogalmazhatjuk, hogy tetszőleges  $n > m$  természetes számokra:  $a_n > a_m$

**1. feladat.** Igazoljuk, hogy az

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

általános tagú sorozatot szigorúan monoton csökken!

(*Útmutatás: használjuk fel, hogy a sin függvény a  $(0, \pi/2)$  intervallumon szigorúan monoton nő.*)

Világos:

$$n < n + 1$$

ezért reciprokot véve

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

és mivel a sin függvény a  $(-\pi/2; \pi/2)$  intervallumon szigorúan monoton növekszik, ezért a fenti egyenlőtlenséget megtartja:

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) > \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

**Tétel** ? a konvergencia monoton korlátossággal megfogalmazott elégséges feltétele ? Monoton, korlátos sorozat konvergens.

**Megjegyzés.** A konvergencia lokalitásából következik, hogy a tétel állítása olyan korlátos sorozatokra is érvényes, melyek csak egy indextől kezdve monotonak.

**Bizonyítás.** Legyen  $(a_n)$  monoton, korlátos valós számsorozat. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az  $(a_n)$  monoton növekvő. Világos, hogy a sorozat szuprémuma véges. Belátjuk, hogy a sorozat konvergál a  $\sup(a_n)$  számhoz.

Legyen  $\varepsilon > 0$  tetszőleges. Ekkor a szuprémum egyenlőtlenségekkel történő jellemzése alapján  $\sup(a_n)$  már nem felső korlátja  $(a_n)$ -nek, így létezik  $N$  természetes szám, hogy

$$a_N > \sup(a_n) - \varepsilon$$

Mivel  $(a_n)$  monoton növekvő, ezért minden  $n > N$  természetes számra

$$a_n \geq a_N$$

így minden  $n > N$ -re

$$\sup(a_n) \geq a_n \geq a_N > \sup(a_n) - \varepsilon$$

ami azt jelenti, hogy az  $N+1$  indextől kezdve a sorozat minden tagja benne van a  $\sup(a_n)$  szám  $\varepsilon$  sugarú környezetében.

## Rendőr elv

**Tétel ? Közrefogási elv ?** Ha  $(a_n)$  illetve  $(b_n)$  az  $A$  számhoz konvergáló sorozatok, és  $(c_n)$  olyan sorozat, hogy egy  $N$  természetes számtól kezdve minden  $n$ -re

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

akkor  $(c_n)$  is konvergens és határértéke  $A$ .

## Rézsorozatok, Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel

**Definíció ? Indexsorozat, rézsorozatok ?** Azt mondjuk, hogy az  $(n_k)$  pozitív természetes számokból álló számsorozat **indexsorozat**, ha szigorúan monoton növekvő. Ha  $(n_k)$  indexsorozat,  $(a_n)$  pedig sorozat, akkor az

$$b_k = a_{n_k}$$

általános tagú sorozat **rézsorozat**a az  $(a_n)$  sorozatnak. Funkcionális jelöléssel, ha  $s$  sorozat és indexsorozat, akkor

$$s \circ \sigma$$

összetett sorozat rézsorozat a  $s$  sorozatnak.

### Példák.

1) Ha  $n_k = k^2$  és  $a_n = 1/n$ , akkor

$$a_{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

természetesen az indexet?l nem függ a sorzat maga, így azt is mondhatjuk, hogy a szóban forgó részsorozat az

$$a_{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

melyet úgy kapunk, hogy az  $a_n$  sorozat minden *négyzetszámadik tagját kiválasztjuk* és az indexek szerint növekv? sorrendbe (szigorúan növekv? indexsorozat) rakjuk:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, \dots$$

Ha tehát  $(a_{n^2}) = (a_{k^2}) = (b_k)$ , akkor  $(a_1, a_4, a_9, a_{16}, \dots) = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$

2) Ha  $n_k = k + 5$  vagy általánosabban  $n_k = k + k_0$ , akkor lényegében azt kapjuk, hogy a sorozat els? 5 illetve  $k_0$  tagját levágjuk és a maradékot tekintjük:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, \dots$$

Ha tehát  $(a_{n+5}) = (a_{k+5}) = (b_k)$ , akkor  $(a_6, a_7, a_8, a_9, \dots) = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$

**Tétel ? Bolzano?Weierstrass-féle kiválasztási tétel részsorozatokkal ?** Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

**2. feladat.** Igazak-e a következ? kijelentések?

1. Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.
2. Ha egy sorozat monoton és van konvergens részsorozata, akkor konvergens.
3. Ha egy sorozat divergens, akkor az  $(1/n)$ -nel vett szorzata konvergens.
4. Ha egy sorozat felül?l nem korlátos, akkor nincs konvergens részsorozata.
5. Ha egy sorozat a + végtelenbe tart, akkor van a + végtelenhez tartó részsorozata.
6. Ha egy konvergens sorozat minden tagja pozitív, akkor a határértéke is pozitív.
7. Ha  $(a_{n+1} - a_n)$  nullsorozat, akkor  $(a_n)$

## Nevezetes határértékek

**Állítás ?** Ha  $a > 0$ , akkor  $\lim \left( \sqrt[n]{a} \right) = 1$

**Állítás**  $\lim \left( \sqrt[n]{n} \right) = 1$

**3. feladat.** Konvergens-e az alábbi sorozat és ha igen, adjuk meg a határértékét!

$$\sqrt[n]{n^2 + 2n + 4}$$

(Útmutatás: közvetlenül rend?relvvel, vagy a polinom  $n$ -edik gyökének határértékére vonatkozó állítással.)

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n^2 + 2n + 4} &\leq \sqrt[n]{n^2 + 2n^2 + 4n^2} = \sqrt[n]{7n^2} = \sqrt[n]{7} \cdot \sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{7} \cdot \left( \sqrt[n]{n} \right)^2 \rightarrow 1 \\ \sqrt[n]{n^2 + 2n + 4} &\geq \sqrt[n]{4} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

**4. feladat.** Konvergens-e az alábbi sorozat és ha igen, adjuk meg a határértékét!

$$\sqrt[n^4]{n^3 - 3n}$$

(*Útmutatás: a legmagasabb fokú tag felével becsüljük felül (vagy alul, ha kell) a kisebb fokú tagokat, majd alkalmazzuk a rend?relvet.*)

$$\sqrt[n^4]{n^3 - 3n} \leq \sqrt[n^4]{n^3} = \left( \sqrt[n^4]{n^4} \right)^{\frac{3}{4}} \rightarrow 1$$

Itt  $\left( \sqrt[n^4]{n^4} \right)$  az  $(\sqrt[n]{n})$  sorozat  $n_k = k^4$  indexsorozattal képezett részsorozata, így az 1-hez tart.

$$\sqrt[n^4]{n^3 - 3n} \geq \sqrt[n^4]{n^3 - \frac{n^3}{2}} = \sqrt[n^4]{\frac{n^3}{2}} = \sqrt[n^4]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[n^4]{n^3} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

Ahol felhasználtuk, az el?z? egyenl?tlenség végén kiszámolt határértéket.

**5. feladat.** Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha van, mi a határértékük?

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

(*Útmutatás: Alakítsuk át nevezetes alakúvá ?ket és használjuk a rend?relvet illetve a majoráns kritériumot.*)

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left( \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

itt a gyök alatti sorozat az e-hez tart mert a nevezetes sorozat  $n_k = k^2$  indexsorozattal adott részsorozata. Tudjuk, hogy a gyök alatti sorozatnak a 4 fels? korlátjam így a rend?relvvel:

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \sqrt[n]{4} \rightarrow 1$$

Tehát a sorozat az 1-hez tart.

A másik sorozat esetén az átalakítás:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^n$$

itt a gyök alatti sorozat az e-hez tart emiatt egy indext?l kezdve egy 1-nél nagyobb konstanssal alulbecsülhet?. Ugyanis 2-höz (pontosabban az  $e$ -2)-höz) létezik  $N$ , hogy minden  $n > N$ -re a sorozat tagjai nagyobbak 2-nél.

$$+\infty \leftarrow 2^n \leq \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^n$$

Tehát ez a sorozat nem konvergens, de a  $+$  -hez tart.

**6. feladat.** Konvergens-e az alábbi sorozat? Ha van, mi a határértéke?

$$\left( \frac{n^2 - 7}{n^2 + 2n} \right)^{n^2}$$

(Útmutatás: Alakítsuk át nevezetes alakúvá.)

$$\left( \frac{n^2 - 7}{n^2 + 2n} \right)^{n^2} = \left( \frac{\frac{n^2 - 7}{n^2}}{\frac{n^2 + 2n}{n^2}} \right)^{n^2} = \frac{\left( 1 + \frac{-7}{n^2} \right)^{n^2}}{\left( 1 + \frac{2}{n} \right)^{n^2}} \rightarrow 0$$

A határértékek indoklása az előző feladat megoldásában levezetéshez hasonló.

## Végtelen határérték

Ehhez először definiálnunk kell a végtelen környezeteit.

**Definíció.** Tetszőleges  $\varepsilon > 0$  számra az  $(1/\varepsilon, +\infty)$  nyílt intervallumokat a  $+$  sugarú kipontozott környezetének tekintjük és  $B^+(1/\varepsilon)$ -vel jelöljük. Ugyanígy tetszőleges  $\varepsilon > 0$  számra az  $(-\infty, -1/\varepsilon)$  nyílt intervallum a  $-$  elem sugarú kipontozott környezetének tekintendő és  $B^-(1/\varepsilon)$ -vel jelöljük.

A valós számok halmazát az  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+$  és  $\mathbb{R}^-$  elemekkel kibővíthetjük.

$\overline{\mathbb{R}}$

jelöli. Ebben értelmes a sorozathatárérték definíciója a következő formában:

**Definíció.** Legyen  $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  és  $(a_n)$  egy  $\mathbb{R}$ -ben haladó sorozat. Azt mondjuk, hogy az  $A$  határértéke az  $(a_n)$ -nek (ekkor  $A = +\infty$  vagy  $-\infty$  esetén a konvergencia helyett a divergencia szót használjuk), ha

tetszőleges  $\varepsilon > 0$  számra az létezik  $N$  természetes szám, hogy minden  $N$ -nél nagyobb  $n$  természetes számra

$$a_n \in B_\varepsilon(A)$$

Ekkor  $A$  az egyetlen ilyen és ezt  $\lim(a_n)$ -nel jelöljük.

## Határozatlan esetek

Konvergens sorozatok esetén láttuk, hogy a határértékképzés felcserélhető a sorozatokkal végzett műveletek elvégzésére, azaz ha  $*$  egy alapművelet és

1.  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  és  $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$ ,
2.  $(a_n * b_n)$  értelmezett és

3.  $a * b$  is értelmezett,

akkor  $a_n * b_n \rightarrow a * b$ .

Az alapszabályok között csak a nullával való osztás nincs értelmezve. Ez az előzőek fényében azt jelenti, hogy például a fenti tétel nem alkalmazható az alábbi példára:

1.  $a_n \equiv 1 \rightarrow 1$  és  $b_n = 1/n \rightarrow 0$ ,
2.  $a_n/b_n \equiv 1/(1/n)$  értelmezett, de
3.  $1/0$  nem értelmezett

és nem is konvergens a hányadossorozat, bár a határértéke a plusz végtelen.

Nem mondhatjuk azonban, hogy az  $1/0$  alakú határértéket mutató sorozatok határértéke mindig a  $+$ , hiszen az  $1/(-1/n)$  sorozat ugyanilyen módon keletkezett, de a  $-$ -be tart. Ezt csak abban az esetben mondhatnánk, ha minden  $a_n \rightarrow 1$ , és  $b_n \rightarrow 0$  sorozat esetén  $a_n/b_n \rightarrow +$  lenne, feltéve, hogy a sorozatok hányadosa létezik.

Ezt a gondolatot fogjuk használni a végtelen határértékű sorozatokkal végzett műveletekre vonatkozó állítás megfogalmazásánál:

Ha  $A$  és  $B$  valamelyike a  $+$  vagy  $-$  szimbólum (a másik, ha nem ilyen, akkor valós szám), akkor az  $A * B$  alapszabályt akkor értelmezzük a  $C$  szimbólumként (mely szintén vagy valós szám, vagy a  $+$ ,  $-$  egyike), ha *minden*, az  $A$ -hoz tartó  $(a_n)$  sorozatra és *minden*, a  $B$ -hez tartó  $(b_n)$  sorozatra az  $(a_n * b_n)$  sorozat *szükség szerint* a  $C$ -hez tart. Ekkor mondjuk tehát, hogy az

$$A * B = C$$

definíció jó.

Például a  $(+ \infty) + (+ \infty)$  művelet feltétlenül értelmezett és értéke a  $+$ , mert könnyen látható, hogy *bármely* két, a  $+$ -hez tartó sorozat összege is a  $+$ -hez tart. Ellenben például a  $0 \cdot (+ \infty)$  művelet nem értelmezhető, mert van két sorozatpár, mely ilyen alakú, de a szorzatuk máshoz tart:  $(1/n) \cdot n \rightarrow 1$ , de  $(1/n) \cdot n^2 \rightarrow + \infty$ .

**Definíció ? Végtelen értékek és alapszabályok ?** Az alábbi műveleti szabályokat vezetjük be a  $+$ ,  $-$  szimbólumokra vonatkozóan, az alábbiakban  $r$  tetszőleges valós szám,  $p$  tetszőleges pozitív szám:

1.  $(\pm \infty) + (\pm \infty) = \pm \infty$ ,  $(\pm \infty) + r = \pm \infty$ ,
2.  $(\pm \infty) - (\mp \infty) = \pm \infty$ ,  $(\pm \infty) - r = \pm \infty$ ,  $r - (\pm \infty) = \mp \infty$ ,
3.  $(\pm \infty) \cdot (\pm \infty) = +\infty$ ,  $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$ ,  $(\pm \infty) \cdot (\pm p) = \pm \infty$ ,  $(\pm \infty) \cdot 0 = 0$ ,
4.  $\frac{r}{\pm \infty} = 0$ ,  $\frac{\pm \infty}{\pm p} = \pm \infty$ ,  $\frac{\pm \infty}{\mp p} = \mp \infty$ ,

és a szorzás és az összeadás kommutatív.

**Definíció ? Határozatlan esetek ?** Az alábbi alapszabályok nem értelmezhetők:

1.  $(\pm \infty) - (\pm \infty)$ ,
2.  $0 \cdot (\pm \infty)$ ,  $(\pm \infty) \cdot 0$ ,
3.  $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ ,  $\frac{\pm \infty}{\mp \infty}$ ,  $\left(\frac{r}{0}\right)$ .



Továbbá értelmezhetjük a  $0+$  és  $0-$  értékeket és a velük való műveletvégzést úgy, hogy  $a_n \rightarrow 0+$  kifejezésen azt értjük, hogy az  $(a_n)$  sorozat egy indextől kezdve pozitív értékeket vesz fel és határértéke a 0, valamint a  $b_n \rightarrow 0+$  kifejezésen azt értjük, hogy az  $(b_n)$  sorozat egy indextől kezdve negatív értékeket vesz fel és határértéke a 0. Ekkor minden művelet azt, ami a 0-ra vonatkozik ugyanaz, valamint értelmezhetjük az alábbi művelet:

$$\frac{p}{0\pm} = \pm\infty, \quad \frac{-p}{0\pm} = \mp\infty,$$

de  $0/0+$  és  $0/0-$  természetesen itt sincs.

**Tétel** Végtelen határérték és alpműveletek, a fenti definíciók jók? Ha az  $(a_n)$  és  $(b_n)$  sorozatoknak létezik határértéke, az  $(a_n * b_n)$  sorozat létezik a \* alpművelettel és a  $\lim(a_n) * \lim(b_n)$  alpművelet elvégezhető, akkor az  $(a_n * b_n)$  sorozatnak is van határértéke és ez:

$$\lim(a_n * b_n) = \lim(a_n) * \lim(b_n)$$

Ezenkívül a határozatlan esetekben, amikor a határértékekkel végzett műveletek nem értelmezettek, a műveletssorozatok határértékeire nem adható általános képlet (mert alkalmasan választott esetekben máshoz és máshoz tartanak).

A hatványozással kapcsoltban is vannak határozatlan esetek, ilyen az

$$1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

alakú határértékek. Az elsőre példa az Euler-féle határérték, a harmadikra a pozitív szám  $n$ -edik gyökeiből álló sorozat határértéke.

**1. feladat.** Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha van, mi a határértékük?

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

(Útmutatás: Alakítsuk át nevezetes alakúvá őket és használjuk a rendszert illetve a majoráns kritériumot.)

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

itt a gyök alatti sorozat az  $e$ -hez tart mert a nevezetes sorozat  $n_k = k^2$  indexsorozattal adott részsorozata. Tudjuk, hogy a gyök alatti sorozatnak a 4 felső korlátja így a rendszertelvel:

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \sqrt[n]{4} \rightarrow 1$$

Tehát a sorozat az 1-hez tart.

A másik sorozat esetén az átalakítás:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n$$

itt a gyök alatti sorozat az  $e$ -hez tart emiatt egy indextel kezdve egy 1-nél nagyobb konstanssal alulbecsülhet. Ugyanis  $2$ -höz (pontosabban az  $e$ -höz) létezik  $N$ , hogy minden  $n > N$ -re a sorozat tagjai nagyobbak  $2$ -nél.

$$+\infty \leftarrow 2^n \leq \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n$$

Tehát ez a sorozat nem konvergens, de a  $+\infty$ -hez tart.

**2. feladat.** Konvergens-e az alábbi sorozat? Ha van, mi a határértéke?

$$\left(\frac{n^2 - 7}{n^2 + 2n}\right)^{n^2}$$

(Útmutatás: Alakítsuk át nevezetes alakúvá.)

$$\left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 - 7}\right)^{n^2} = \left(\frac{\frac{n^2 + 2n}{n^2}}{\frac{n^2 - 7}{n^2}}\right)^{n^2} = \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{-7}{n^2}\right)^{n^2}} \rightarrow +\infty$$

A határértékek indoklása az előző feladat megoldásában lévőhöz hasonló.