

Tartalomjegyzék

- 1 Pontbeli folytonosság
- 2 Folytonosság és m?veletek
 - ◆ 2.1 Folytonosság és alapm?veletek
 - ◆ 2.2 Folytonosság és függvénym?veletek
- 3 Bolzano-tétel
- 4 Weierstrass-tétel

Pontbeli folytonosság

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: \mathbf{R} \supset \rightarrow \mathbf{R}$ függvény folytonos az értelmezési tartománya egy u pontjában, ha

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \text{Dom}(f))(|x - u| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon)$$

Folytonos egy függvény, ha az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

Példa. $x \mapsto \sqrt{x}$ folytonos.

Legyen $u > 0$ és $\varepsilon > 0$. Legyen egyelőre tetszőleges. Ha $x > 0$ olyan, hogy $|x - u| < \delta$, akkor

$$|\sqrt{x} - \sqrt{u}| = \frac{|x - u|}{\sqrt{x} + \sqrt{u}} \leq \frac{|x - u|}{\sqrt{u}} < \frac{\delta}{\sqrt{u}} = \varepsilon$$

tehát az ε -hoz a $\delta = \varepsilon \sqrt{u}$ -t kell választanunk.

Ha $u=0$, akkor

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

tehát az ε -hoz a $\delta = \varepsilon^2$ -t kell választanunk.

Példa. abs: $x \mapsto |x|$ folytonos. Ezt azzal látjuk be, hogy az abszolútérték következő megadását tekintjük:

$$\text{abs}(x) = \max\{a, -a\}$$

Tetszőleges u pontra igaz a következő becslés:

$$||x| - |u|| \leq |x - u|$$

mert a háromszög egyenlőtlenség miatt:

$$|x| = |x - u + u| \leq |x - u| + |u|$$

azaz

$$|x| - |u| \leq |x - u|$$

illetve

$$|u| = |-u| = |x - u - x| \leq |x - u| + |x|$$

azaz

$$|u| - |x| \leq |x - u|$$

Tehát

$$||x| - |u|| = \max\{|u| - |x|, |x| - |u|\} \leq |x - u|$$

Ezért ha $\delta := \varepsilon$, akkor:

$$|x - u| < \delta \Rightarrow ||x| - |u|| \leq |x - u| < \delta = \varepsilon$$

Heine-féle jellemzés. Az $f: \mathbf{R} \supset \rightarrow \mathbf{R}$ függvény folytonos az értelmezési tartománya egy u pontjában, ha

$$(\forall (x_n) \in \text{Dom}(f)^{\mathbf{Z}^+})(x_n \rightarrow u \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(u))$$

Ebből kapjuk azt a rendkívül hasznos eszközt, mellyel a nemfolytonosságot jellemezni tudjuk:

Pontbeli nemfolytonosság jellemzése. Az $f: \mathbf{R} \supset \rightarrow \mathbf{R}$ függvény nem folytonos az értelmezési tartománya egy u pontjában, ha

létezik olyan $(x_n) \in \text{Dom}(f)^{\mathbf{Z}^+}$ sorozat, hogy bár $x_n \rightarrow u$, de $f(x_n) \not\rightarrow f(u)$.

Példa.

$$\text{sgn} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \begin{cases} +1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Nem folytonos a 0-ban.

Hiszen, ha x_n a pozitívokon keresztül tart a 0-ba, akkor $f(x_n) = +1$, miközben $f(0) = 0 \neq +1$.

Példa.

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

nem folytonos a 0-ban.

Hiszen, ha

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

akkor $x_n \rightarrow 0$ a pozitívok felől, de

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = +1 \neq 0 = f(0)$$

Megjegyezzük, hogy akárhogy is definiálnánk $f(0)$ -t, a függvény nem lenne folytonos, mert ha $f(0) \neq +1$, akkor a fenti sorozat ellenpélda, ha $f(0) = +1$, akkor az $(1/n)$ sorozat ellenpélda (mert ekkor $f(x_n) \rightarrow 0$).

Folytonosság és m?veletek

Folytonosság és alapm?veletek

FIA. A folytonosság invariáns az alapm?veletekre.

Emiatt minden polinomfüggvény és racionális törtfüggvény folytonos. Ehhez csak egyetlen függvény, az identitás folytonosságát kell belátni.

Folytonosság és függvénym?veletek

A függvénym?veletek közül a legfontosabb, a **függvénykompozíció**:

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) \mid g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x))$$

Legyen $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ u $\text{Dom}(f \circ g)$. Ha g folytonos u -ban és f folytonos $g(u)$ -ban, akkor $f \circ g$ folytonos u -ban.

A másik az injektív függvények esetén az inverz függvény képzés.

Injektív egy f függvény, ha $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ következik az f értelmezési tartományában lévő minden x_1 és x_2 -re. Ezt a tulajdonságok használtuk, amikor azt írtuk:

$$2^{x+8} = 2^{x^2+5}$$

$$\Downarrow$$

$$x + 8 = x^2 + 5$$

vagy

$$\sqrt{x+8} = \sqrt{x^2+5}$$

$$\Downarrow$$

$$x + 8 = x^2 + 5$$

Például szigorúan monoton függvény biztosan injektív. Injektív f inverze:

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f)$$

$$f^{-1}(y) = x, \quad f(x) = y$$

Később belátjuk, hogy intervallumon értelmezett injektív és folytonos függvény inverze folytonos. Intervallumon szigorú monotonitásból azonban még nem folytonos f esetén is következik az intervallumon folytonos inverz.

Állítás. Ha $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ szigorúan monoton, akkor az inverze folytonos.

Ugyanis, Legyen f szig. mon. növ. és $v=f(u)$ -ban f^{-1} balról nem folytonos (ha nincs baloldala, akkor jobbról). Ekkor létezik $\text{Ran}(f)$ $(-\infty, v]$ -ben olyan (y_n) konvergens sorozat, mely v -hez tart, de $f^{-1}(y_n)=x_n$ nem tart u -hoz. Az inverz is szigorúan monoton növekvő, így megtartja a rendezést, azaz (x_n) is $(-\infty, u]$ -ban halad. Korlátos is, mert $\min(y_n)$ képe a képek egy alsó korlátja is lesz. Emiatt (x_n) -nek a Bolzano-tétel miatt van

$$x_{n_k} \rightarrow \liminf(x_n) < u$$

konvergens részsorozata (ha $\liminf(x_n) = u$ - lenne, akkor konvergens lenne!). Eszerint akkor egy $\liminf(x_n) < w < u$ számra igaz, hogy a $(w, u]$ intervallumban a részsorozatnak csak véges sok tagja van, ahogy az $(f(w), f(u)]$ intervallumban is csak véges sok képe. De ez ellentmond annak, hogy a részsorozat képe az u -hoz tart.

Példa. Folytonosan invertálható-e az alábbi függvény? Indokoljuk a fenti tétel nélkül!

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ x^2 + 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Megoldás. Persze, hisz a negatívokon invertálható és csak negatív értéket vesz fel. A pozitívokon szintén és szintén csak pozitív értékeket vesz fel. A 0-beli érték az elzárható képhalmazokon kívül esik (a 0). Az inverz:

$$\text{Dom } f^{-1} = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{-y-1}, & \text{ha } y < -1 \\ 0, & \text{ha } y = 0 \\ \sqrt{y-1}, & \text{ha } y > 1 \end{cases}$$

Ez a függvény mindenütt folytonos, mert a gyök az, és a 0-ban izolált pontja van, ahol a függvények triviálisan folytonosak.

Bolzano-tétel

Bolzano-tétel Intervallumon értelmezett, negatív és pozitív értékeket is felvevő folytonos függvénynek van zérushelye.

A Bolzano-tételt olyan alakban is meg lehet fogalmazni, hogy folytonos függvény két függvényértéke között minden értéket felvesz. Ezt néha *Bolzano-Darboux-tételnek* is nevezik amiatt, mert a most megfogalmazott tulajdonság az úgy nevezett Darboux-folytonosság vagy *Darboux-tulajdonság*.

Példa. Igazoljuk, hogy az intervallumon injektív és folytonos függvény szigorúan monoton.

Ugyanis, feltehet?, hogy ilyen a helyzet: létezik $x_1 < x_2 < x_3$ az I-ben, hogy $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$. De ekkor az $f(x_3) \notin [f(x_1), f(x_2)]$ miatt létezik $u \in [x_1, x_2]$, hogy $f(u) = f(x_3)$, ami miatt f rögtön nem injektív.

A feltételek nem hagyhatók el. Pl. sin periodikus és így nem injektív, bár folytonos. Pl. $\operatorname{sgn}(x)(|x|+1)$ szig. mon. n?, de nem folytonos.

Példa. Igazoljuk, hogy ha $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ folytonos, akkor van olyan $u \in [0,1]$, hogy $f(u)=u$ (azaz van fixpontja).

Ugyanis, transzformáljuk a függvényt: $g(x):=f(x)-x$. Ekkor g folytonos és

$$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$$

de

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - 0 \geq 0 \\ g(1) &= f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Tehát a Bolzano-tétel miatt van zérushelye g-nek, azaz fixpontja f-nek.

Weierstrass-tétel

Weierstrass-tétel Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi abszolút minimumát és maximumát.

Példa. Mindenhol folytonos függvény két lokális minimumhelye között mindig van egy lokális maximumhelye.