

Tartalomjegyzék

- 1 Néhány topologikus fogalom
- 2 Függvényhatárérték
 - ◆ 2.1 Határérték és m^oveletek
 - ◆ 2.2 Határérték és rendezés
 - ◆ 2.3 Határérték és függvénykompozíció
 - ◆ 2.4 Folytonosság és határérték kapcsolata
- 3 Szakadási pontok és azok osztályozása
- 4 Nevezetes határértékek
 - ◆ 4.1 Példák
- 5 Differenciálhatóság
- 6 Példák Bolzanora és Weierstrassra
- 7 Feladatok (mindenféle gyors diff.)

Néhány topologikus fogalom

Ha $A \subseteq \mathbb{R}$ valós számhalmaz, akkor az $u \in \overline{A}$ pontot az A

- **torlódási pontjának** nevezzük, ha minden $r > 0$ esetén $B_r(u) \setminus \{u\} \cap A$ nem üres (vagy ekvivalens módon: végtelen)
- **izolált pontjának** nevezzük, ha $u \in A$, de nem torlódási pontja A -nak.
- **belső pontjának** nevezzük, ha van olyan környezete, mely benne van A -ban.
- **határpontjának** nevezzük, ha torlódási pontja mind a halmaznak, mind a komplementerének.

Emellett U **nyílt halmaz**, ha minden pontja belső pont és **zárt**, ha komplementere nyílt.

Például egy nemelfajuló (nem egy pontú, nem üres) intervallum végpontjai határpontjai az intervallumnak.

Függvényhatárérték

Legyen f egy az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett, \mathbb{R} -be képező függvény. Legyen $u \in \overline{A}$ az A torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f -nek a $u \in \overline{A}$ elem **határértéke** az u -ban, ha

minden $\epsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in A \cap B_\delta(u) \setminus \{u\}$ -re $f(x) \in B_\epsilon(v)$

ahol természetesen a $+$ és $-$ környezetei a már említett módon értendők.

Ebben az esetben a határérték egyértelmű és jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \lim_{x \rightarrow u} f = v$$

Bal és jobboldali határérték:

$$\exists \lim_{u+} f = v \Leftrightarrow_{\text{def}} \exists \lim_u f|_{(u, +\infty)} = v$$

$$\exists \lim_{u-} f = v \Leftrightarrow_{\text{def}} \exists \lim_u f|_{(-\infty, u)} = v$$

Ugyanúgy, ahogy a folytonosság esetén itt is van átviteli elv:

Tétel. Legyen f egy az $A \subset \mathbf{R}$ halmazon értelmezett, \mathbf{R} -be képező függvény. Legyen $u \in \overline{\mathbf{R}}$ az A torlódási pontja és $u \in \overline{\mathbf{R}}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

1. f -nek a v **határértéke** az u -ban,
2. minden az $A \setminus \{u\}$ -ban haladó, az u -hoz konvergáló (x_n) sorozat esetén az $(f(x_n))$ a v -hez konvergál.

Ennek a segítségével egy rendkívül hatékony eszközt kapunk arra, hogy a határérték nemlétezését igazoljuk:

Állítás. f -nek pontosan akkor nincs határértéke u -ban, ha van olyan $A \setminus \{u\}$ -ban haladó, az u -hoz konvergáló (x_n) sorozat, mely esetén az $(f(x_n))$ nem tart egyetlen elemhez sem.

Feladat. Igazoljuk definíció szerint, hogy

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
2. $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ de létezik mindkét egyoldali határértéke.

1. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor azt kell belátnunk, hogy létezik $\delta > 0$, hogy teljesüljön $|x| < \delta$ esetén, hogy a függvényérték a $+\infty$ sugarú környezetébe esik, azaz:

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Világos, hogy ezt azt jelenti, hogy

$$|x| < \sqrt{\varepsilon}$$

amit reciprokvonással kaptunk. Ha tehát $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ és $|x| < \delta$, akkor
<http://wiki.math.bme.hu/feladat/2008/8/1> következtetve kijön a kívánt egyenlőtlenség.

2. Megadunk egy nullsorozatot, mely függvényértékeinek sorozatának semmiképpen nincs határértéke:

$$x_n = \frac{1}{n}(-1)^n$$

Ekkor $x_{2n} \rightarrow +$ és $x_{2n+1} \rightarrow -$, holott ezeknek egyenlőnek kellene lenniük (ha létezik határérték, akkor minden részsorozat határértéke ugyanaz).

Határérték és műveletek

Tétel Végtelen határérték és alapműveletek? Ha az f és g valós függvényeknek létezik határértékük az $u \in \overline{\mathbf{R}}$ helyen, az $f * g$ alapművelettel elkészített függvény értelmezési tartományának torlódási pontja u és a $\lim_u f * \lim_u g$ alapművelet elvégezhető, akkor az $f * g$ függvénynek is van határértéke u -ban és ez:

$$\lim_u (f * g) = \lim_u f * \lim_u g$$

Ezenkívül a határozatlan esetekben, amikor a határértékekkel végzett műveletek nem értelmezettek, az alapműveletekkel elkészített függvények határértékeire nem adható általános képlet (mert alkalmasan választott esetekben máshoz és máshoz tartanak).

Feladat. Vizsgáljuk meg határérték szempontjából az

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$$

függvényt.

Mo.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x - 2)^2}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{x - 2}{x - 1}, \text{ ha } x \neq 1; 2$$

Határérték és rendezés

Két elvet használunk gyakran. Az egyik a "http://wiki.math.bme.hu/korlatos szor nullához tartó az nullához tart" http://wiki.math.bme.hu , a másik a minorálás: ha $g(x)$ az u -ban a + végtelenbe tart és $f(x)$ az u környezetében nagyobb mint $g(x)$, akkor $f(x)$ is a végtelenbe tart.

A rendezés elv megfogalmazása házi feladat.

Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a

$$f(x) = \frac{\sin(x) \cdot \operatorname{sh}(x)}{e^{2x}}$$

függvénynek létezik-e és ha igen mi a határértéke az értelmezési tartományai határpontjaiban!

Mo.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x) \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{e^{2x}} = \frac{\sin(x) \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2}}{e^{2x}} = \frac{1}{2} \sin(x) (e^{-x} - e^{-3x}) = \\ &= \frac{1}{2} \sin(x) e^{-x} (1 - e^{-2x}) \end{aligned}$$

Egyfelől

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} e^{-x} \rightarrow 0, \text{ ha } x \rightarrow +\infty$$

Másfelől ha

$$x_k = \frac{\pi}{2} - k2\pi$$

akkor

$$f(x_k) = -\frac{1}{2}e^{-3x_k}(1 - e^{4x_k}) \geq -\frac{1}{2}e^{-3x_k} \rightarrow -\infty$$

miközben

$$f(k\pi) \equiv 0 \rightarrow 0$$

tehát nincs határértéke a -ben.

Határérték és függvénykompozíció

Definíció. Ha f és g függvények, akkor az $f \circ g$ (függvénykompozíció vagy összetett függvény) hozzárendelési utasítása:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ másként: } x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$$

értelmezési tartománya pedig:

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom} \mid g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

Összetett függvények esetén a leggyakrabban használt, a határértékre vonatkozó állítás:

Tétel. Ha u torlódási pontja a $\text{Dom}(f \circ g)$ halmaznak, g injektív az u egy környezetén, létezik határértéke és f -nek létezik határértéke $v = \lim_u g$ -ben, akkor $f \circ g$ -nek is létezik határértéke u -ban és

$$\lim_u f \circ g = \lim_v f$$

Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$$

függvény határértékeit az értelmezési tartománya határpontjaiban!

Folytonosság és határérték kapcsolata

A folytonosságot, csak az értelmezési tartomány pontjaiban nézhetünk, hisz a definícióban $f(u)$ is szerepel. Ellenben határértéket akár azon kívüli is nézhetünk (sőt!). Mégis, a két fogalom között szoros kapcsolat van:

1. Tétel. -- Folytonos függvény határértéke a helyettesítési értéke -- Legyen az u az f értelmezési tartományában. Ekkor a következők ekvivalensek egymással:

1. f folytonos u -ban
2. u izolált pontja $\text{Dom}(f)$ -nek, vagy u torlódási pontja $\text{Dom}(f)$ -nek, létezik u -an határértéke és $\lim_u f = f(u)$

2. Tétel. -- Véges helyen véges határérték? függvény folytonossá tehet? -- Legyen u a $\text{Dom}(f)$ véges torlódási pontja és v véges (\mathbf{R} -beli) szám. Ekkor a következők ekvivalensek.

- $\exists \lim_u f = v$

- létezik az f -nek olyan \bar{f} u -ban folytonos kiterjesztése (vagy módosítása), hogy $\bar{f}|_{\text{Dom}(f) \setminus \{u\}} = f|_{\text{Dom}(f) \setminus \{u\}}$ és $\bar{f}(u) = v$

Feladat. Mi a határértéke 0-ban az

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

Feladat. Van-e folytonos kiterjesztése az

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

függvény?

Szakadási pontok és azok osztályozása

Folytonos egy függvény, ha az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos. De a nem-folytonosságot ezért csak az értelmezési tartomány pontjaiban lehet értelmezni -- sokszor a nem-folytonosságot szakadásnak nevezik. Mi ennél tágabb fogalommal fogunk foglalkozni, szakadást a határpontokban is értelmezzük. Ekkor persze már nem lesz igaz az, hogy folytonos egy függvény, ha nincs szakadása, azt viszont értelmes ekkor is mondani, hogy *folytonos egy függvény, ha az értelmezési tartományána pontjaiban nincs szakadása.*

Definíció. Szakadása van az f függvénynek a véges u pontban, ha $u \in \text{Dom}(f)$, de f nem folytonos u -ban vagy u nem eleme $\text{Dom}(f)$ -nek, de torlódási pontja $\text{Dom}(f)$ -nek.

Egy szakadás **els?fajú**, ha minden egyoldali határérték, mely értelmes az létezik is és véges. Ezekb?l kett? van: -- **ugrás**, amikor a bal és jobboldali határérték létezik de nem egyenl? és -- **megsz?ntethet? szakadás**, ha nem ez a helyzet.

Másodfajú, ha nem els?fajú.

Feladat. Milyenek az alábbi függvények szakadásai:

- $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

- $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

- $\frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

- $\ln\left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$

Nevezetes határértékek

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$$

Példák

$$\frac{\ln(1 + \sin x)}{\ln \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot (e^{\frac{2}{x^2}} - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x + 4\pi}{\operatorname{arc\,tg} 3x + \pi}$$

Differenciálhatóság

Legyen f valós-valós függvény, $u \in \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(f)'$. Az f függvény differenciálható az u pontban, ha

1. Definíció -- létezik olyan $m \in \mathbf{R}$ függvény és olyan $m \in \mathbf{R}$ szám, hogy:

1. minden $x \in \operatorname{Dom}(f)$ -re
 $f(x) = f(u) + m(x - u) + o(x - u)$ és
2. $o(x - u) = 0$ és o az u -ban folytonos.

Ebben az esetben az f függvény u -beli deriváltja m és jele $f'(u)$

2. Definíció -- létezik és véges a következő határérték:

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \quad (*)$$

Ekkor $f'(u)$ maga a fenti határérték.

A két definíció ekvivalens, amit a következő egyenlőséggel lehet igazolni:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} - A, & \text{ha } x \neq u \\ \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} - A, & \text{ha } x = u \end{cases}$$

ahol A az m -et jelöli, ha 1)-et tudjuk és 2)-t igazoljuk és $\lim_{x \rightarrow u} \varepsilon(x) \rightarrow 0$ -t, ha fordított a helyzet.

Világos, hogy a (*) határérték egy úgy nevezett határozatlan kifejezés, hisz mindig $0/0$ alakú. Ez a a szelők meredekségének határértéke,

Az első definíció is szemléletes. Itt arról van szó, hogy a függvény felírható u körül egy lineárisan eltérő és egy magasabb rendben eltérő tag összegeként:

$$\ell(x) = f(u) + m(x - u), \text{ a lineáris és } \varepsilon(x)(x - u) \text{ a nemlineáris}$$

Példa. Igazoljuk, hogy

$$f(x) = e^{\sin x}$$

differenciálható a 0-ban és deriváltja 1.

Megoldás. Definíció szerint igazoljuk, azaz a pontbeli derivált (*) képletével. Legyen $x \neq 0$. Ekkor

$$\frac{e^{\sin x} - e^{\sin 0}}{x - 0} = \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \frac{x}{\sin x}$$

Ha most $x \rightarrow 0$, akkor az utolsó egyenlőség után az első tényező és a második tényező is az 1-hez tart, minthogy ezek nevezetes határértékek.

Példa. Igazoljuk, hogy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} - \frac{1}{4} \sin x, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

differenciálható a 0-ban és deriváltja $1/4$.

Megoldás. Definíció szerint igazoljuk, azaz a pontbeli derivált (*) képletével. Legyen $x \neq 0$. Ekkor

$$\frac{\frac{1 - \cos x}{x} - \frac{1}{4} \sin x - 0}{x - 0} = \frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{\frac{1}{4} \sin x}{x}$$

Ha most $x \rightarrow 0$, akkor az utolsó egyenlőség után az első tényező és a második tag, mint nevezetes határérték az $1/2$ -hez tart, míg a második tag az $1/4$ -hez. Emiatt a határérték $1/4$.

Példák Bolzanora és Weierstrassra

$$f(x) = e^{e^x}$$

felveszi-e a 2 értéket?

$$f(x) = e^{-\frac{x^2-1}{x}}$$

Felveszi-e a maximumát?

Feladatok (mindenféle gyors diff.)

1. Kiterjeszthet?-e folytonosan ill. differenciálható módon az $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$?

2. Hány zérushelye van az $f(x) = \sqrt[4]{x} - \frac{1}{x^3}$ -nek?

3. Hány zérushelye van az $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 1$ függvénynek?

4. Mik a határértékei az ért. tart. határain, milyen szakadása van, hol monoton, hol vannak a lokális széls?értékei, hol konvex, konkáv?

a) $f(x) = e^{1/x}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

c) $f(x) = |x|e^x$