Ez az szócikk a Matematika A2a 2008 alszócikke.

Tartalomjegyzék

- 1 Többváltozós bemelegítés
- 2 Függvénytér
    - 2.1 Példák
- 3 Normált tér
- 4 Topológia
- 5 Kiegészít? anyag
    - 5.1 Heine--Borel-tételkör
    - 5.2 Feladatok skaláris szorzásra

Többváltozós bemelegítés

Oldja meg az

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = & 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 & = & 4 \end{array}$$

egyenletrendszert!

MO. A kib?vített mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ez utóbbit hívják lépcs?s alaknak. Ha most a f?átlóba egyeseket teszünk (vezérelemek) és fölöttük alattuk csak nullák állnak (a többi maradhat), akkor a redukált lépcs?s alakhoz jutunk.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen a megoldás (az x_3 és x_4 változókat rendre az s és t paramétereknek választva)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-s \\ 2-s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Függvénytér

A félév során gyakran fogunk találkozni olyan lineáris terekkel (a lineáris tér fogalmát az el?adáson tanuljuk meg), melyek elemei függvények. Ezeknek alaptípusa a következ?. Legyen H tetsz?leges halmaz. Ekkor a

$$\{f : H \to \mathbf{R}\} =_{\mathrm{def}} \mathbf{R}^H \; (= \mathcal{F}(H))$$

halmazt, azaz a H-n értelmezett **R**-be képez? függvények halmazát **függvénytér**nek nevezzük. A függvénytér lineáris tér a pontonként m?veletekkel, azaz a következ?kkel:

$$f+g : H \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto f(x)+g(x)$$

ha   valós szám, akkor

$$\lambda.f : H \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \lambda.f(x)$$

Függvénytér lineáris alterét is függvénytérnek nevezzük. Lineáris altér egy lineáris tér részhalmaza, ha a fenti m?veletekre zárt.

Feledat. a) Keressünk olyan n $F(H)$-t, melyre minden f esetén $n+f=f+n=f$! b) Keressünk minden f $F(H)$-hez olyan g-t, melyre az el?z? (egyébként egyértelm?) n $F(H)$-nel $f+g=g+f=n$ teljesül! c) Igazoljuk, hogy minden f, g $F(H)$-re $(f + g) =\ f +\ g$, $(\ + \mu)f =\ f + \mu f$, $(\mu f) = (\ \mu)f$, $1.f = f$!

Az F függvénytér B részhalmaza bázis, ha B-beli elemek lineáris kombinációjával a tér összes eleme egyértelm?en el?áll, azaz ha minden f F-re léteznek egyértelm?en olyan $_1$, ..., $_n$ számok, hogy

$f =\ _1 f_1 +\ _2 f_2 + ... +\ _n f_n$,

ahol f_1, ..., f_n B. B elemszáma a (véges) dimenzió.

Példák

1.

$$\mathbf{R}^{\mathbf{R}},$$

melynek elemeit koordinátarendszerben is tudjuk ábrázolni. Természetesen ez végtelen dimenziós.

2. Az intervallumon korlátos függvények B(I) halmaza altere az el?z?nek.

3. A zárt és korlátos intervallumon folytonos függvények C[a,b] tere része az a B[a,b]-nek. Ugyanígy a Riemann integrálható függvények is R[a,b] tere is.

4. Legyen H = {1,2,3}. Ekkor az {f:H $\longrightarrow$ **R**} halmazt még úgy is meg lehet adni, hogy az elemeit egy rendezett hármasba foglaljuk:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$$

Ezt jelöljük $\mathbf{R}^3$-nak. $\mathbf{R}^3$ minden elemét meg lehet adni 3 el?re megadott elem lineráis kombinációjaként: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). Ezek alkotják $\mathbf{R}^3$ sztenderd bázisát (rendes bázis). Általában $\mathbf{R}^n$. Ebbeli függvények analíziséve fogunk foglalkozni.

5. Legyen $\mathbf{R}^{2\times3}$ a 2-szer 3-as mátrixok tere. Ez szintén lineáris tér az elemenkénti összeadással és a skalárral szorzással. A bázisa 6 elem?.

6. {s:$\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R}$} azon részhalmaza, mely az egy "http://wiki.math.bme.huid? után konstans nulla"http://wiki.math.bme.hu sorozatokból áll ($\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$) (ami azonosítható a polinomok terével). Ez végtelen dimenziós és a báziselemek a hatványfüggvények.

Normált tér

Az N vektortéren értelmezett

||.||: N $\longrightarrow$ **R**

függvény norma *N*-en, ha

1. ||v|| $\geq$ 0 minden v N-re és v=0, ha ||v|| = 0.
2. minden számra és v N-re | |· ||v||=|| .v||
3. ||u + v|| $\leq$ ||u|| + ||v||

Ekkor *N* a ||.||-val ellátva *normált tér*.

Hossz azért kell, mert fontos az analítis számára a gömbi környzet, azaz az > 0 sugarú *a* *N* középpontú nyílt gömb:

$$\mathrm{B}_\varepsilon(a) = \{x \in N \mid ||x - a|| < \varepsilon\}$$

Példa. A f?példán, az $\mathbf{R}^3$-en, ez az euklideszi vektorhossz, azaz a Pithagorasz-tételb?l kiszámítható

$$||v|| = |v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Példa. Két lényeges $\mathbf{R}^n$-beli norma.

1. $$||v||_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\right)^{1/p}$$ p>0, akkor
2. $||v||_{\max} = \max_{i=1}^n\{|v_i|\}$

Érdemes megnézni, hogy a gömbök $\mathbf{R}^2$-ben hogy néznek ki. $||.||_1$ esetén a gömb egy csúcsára állított négyzet 2 átlóval. $||.||_{\max}$ egy oldalára állított négyzet. $||.||_2$pedig egy körlap.

Példa. Függvénytéren a leggyakoribb norma a szuprémumnorma. Ha B(H,**R**) a H $\longrightarrow$ **R** korlátos függvények tere, akkor ennek akármilyen alterén norma az

$$||f||_{\sup} = \sup_{x\in H}\{|f(x)|\}$$

Topológia

u **bels? pont**ja *H*-nak, ha van olyan (gömbi) környezete u-nak, mely teljes egészében *H*-beli. *H* **nyílt** halmaz, ha minden pontja bels? pont. *H* **zárt**, ha komplementere, azaz az

$$N \setminus H$$

halmaz nyílt.

Tétel. Minden véges dimenziós normált tér ekvivalens egymással topologikus szempontból, azaz bármilyik norma ugyanazokat a nyílt halmazokat határozza meg.

Célszer? tehát a feladatokban választani például azt a p-edik normát, mellyel a legkönnyebben lehet számolni.

Világos, hogy $\mathbf{R}^n$ nyílt halmaz, így ennek komplementere, az üres halmaz zárt. Ám, az üres halmaz nyílt is, hiszen minden pontja bels? pont. Ha ugyanis lenne olyan pontja, ami nem bels? pontja, akkor lenne egyáltalán pontja, ami lehetetlen, lévén az üres halmaz üres. Így komplementere, azaz $\mathbf{R}^n$ zárt halmaz is. Tanulság: vannak **nyílt-zárt** halmazok (clopen in English) és vannak **se nem nyílt, se nem zárt** halmazok, például a [0,1) intervallum. Vagyis "http://wiki.math.bme.hua halmaz **nem** ajtó, ami vagy nyílt, vagy zárt"http://wiki.math.bme.hu!

Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt, akármennyi nyílt halmaz uniója nyílt. A zártakra a duális állítás igaz: véges sok zárt halmaz uniója zárt, akárhány zárt halmaz metszete zárt.

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok nyílt halmaz uniója nyílt!
2. Igazoljuk, hogy véges sok nyílt halmaz metszete nyílt!
3. Adjuk példát végtelen sok nyílt halmazra, amelyek metszete nem nyílt!
4. Adjuk példát végtelen sok zárt halmazra, amelyek uniója nem zárt!

Kiegészít? anyag

Heine--Borel-tételkör

Kompakt egy *K* halmaz, ha minden nyílt halmazrendszerb?l, melynek uniója lefedi *K*-t kiválasztható véges sok nyílt halmaz is, melyek véges uniója még mindig lefedi *K*-t.

Heine-Borel-tétel. Véges dimenziós normált térben minden korlátos és zárt halmaz kompakt.

$\mathbf{R}^n$ véges dimenziószáma nagyon lényegesen hozzájárul a fenti tételek fennállásához. Általában (Haussdorf-térben) kompakt halmaz korlátos és zárt. Ám, van olyan végtelen dimenziós normált tér, melyben zárt és korlátos halmaz nem kompakt. Legyen ugyanis $\ell_\infty(\mathbf{R})$ a korlátos sorozatok tere. A téren a norma a suprémum:

$$||s||_\infty = \sup\{|s_n| \mid n \in \mathbf{N}\}$$

Példa.

$$H := \{s \in \ell^\infty(\mathbf{R}) \mid ||s|| \leq 1\}$$

"http://wiki.math.bme.hugömb"http://wiki.math.bme.hu zárt, korlátos, de nem kompakt.

Ugyanis, Nyilván korlátos, mert belefoglalható a $B_2(0)$ kétség sugarú 0 körüli gömbbe. Zárt is, ehhez nézzük a komplementerét! Ha ||s||> 1, az pontosan azt jelenti, hogy sup s >1, azaz létezik olyan >0, hogy minden *n*-re |s(n)| > 1+ . Pozitív s(n)-re vegyük az s(n)>(s(n)+1+)/2 > 1+ , negatív tagokra az s(n)<(s(n)+(-1-epsilon))/2<-1- elemekb?l álló *t* sorozatot. Ez a komplementerben halad, mert sup |*t*| > 1+(/2).

De nem kompakt. Fedjük le ugyanis a

$$H_n := \{s \mid |s(k)| < 2, \;\; ha \;\; k < n, \;\; \sup_{k>n}|s(k)| < 1/2\}$$

halmazokkal! Ezek nyíltak, de véges sok nem fedi le H-t.

Hasonló furcsaságok jelentkeznek a p-edik hatványon szummálható sorozatok $\ell_p(\mathbf{R})$ terében is. Számunkra esetleg a véges sorösszeggel rendelkez? $\ell_1(\mathbf{R})$ tér bír jelent?séggel.

Feladatok skaláris szorzásra

Euklideszi terek

Csak megjegyezzük, hogy ha egy vektortéren be lehet vezetni skaláris szorzatot, abban az értelmeben, ahogy az a top.pdf-en le van írva, akkor rögvest eljutunk a normához.

Példa. Ha v,u $\mathbf{R}^n$, akkor

$$v \cdot u = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$$

Ekkor

$$||v||_2 = \sqrt{|v \cdot v|}$$

Példa.

Legyen (a_n), (b_n) : $\mathbf{Z}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^N$ és 0 nem eleme Ran($||b_n||$). Melyikb?l következik melyik:

(i) $(a_n \cdot b_n)$ korlátos **és** $\frac{a_n}{||b_n||}$ korlátos

(ii) (a_n) korlátos **és** (b_n) is korlátos

(iii) (a_n) korlátos **vagy** (b_n) korlátos

Itt $(a_n b_n)$ a sorozatok elemeinek skaláris szorzatából készített sorozat.

Megoldás

(i) $\not\Rightarrow$ (ii)

ugyanis az ellenpélda már **R**-ben jelentkezik: (a_n) = (0,0,0,...,0,...) és (b_n) = (1,2,3, ...,n,...). Világos, hogy a szorzat és a hányados is korlátos, mert mindkett? az azonosan nulla, holott (b_n) az Archimédészi axióma miatt nem korlátos.

(ii) $\not\Rightarrow$ (i)

Szintén már **R**-ben jelentkezik az ellenpélda:

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n^2}$$

mindekett? korlátos, és még a szorzat is, de a hányados már nem.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) tisztán logikai okokból

(iii) $\not\Rightarrow$ (ii) azt nem állítanám hogy tisztán logikai okokból, de az adott szituációban mindenképpen. Magyarán ellenpélda kell: az egyik a csupanulla, a másik az (n).

(iii) $\not\Rightarrow$ (i) már **R**-ben sem: csupanulla, (n)

(i) $\not\Rightarrow$ (iii)

A legérdekesebb eset. **R**-ben igaz, magasabb dimenzióban nem, tehát összességében nem. **R**-ben:

$$|a_n b_n| < K \qquad \frac{|a_n|}{|b_n|} < L$$

akkor

$$a_n^2 < KL$$

amib?l az egyik, azaz (a_n) korlátos. De $\mathbf{R}^2$-ben már nem igaz: (a_n) = ((n,0)), (b_n) = ((0,n)). Ezek skaláris szorzata 0, az els? osztva a második elemenkénti normájával az y irányú egységvektor, mint konstans sorozatot adja.

<u>2. gyakorlat</u>