Ez az szócikk a Matematika A2a 2008 alszócikke.

Szakadásos függvény integrálja téglalaptartományon

1.

$$T = [0,1] \times [0,1]$$
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\int_T f = ?$$

A függvény csak egy pontban szakad és korlátos, így integrálható.

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \frac{2xy}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = *$$

$$F(x) = \int_{y=0}^{1} \frac{2xy}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}y = \left[x\ln(x^2+y^2)\right]_{y=0}^{1} = x\ln(x^2+1) - x\ln(x^2)$$

F a [0,1]-en nincs értelmezve, mert 0-ban szakadása van, de

$$F(x) \sim_0 x\ln\left(x^2\right) = 2x\ln x > 2\ln x$$

ami impróprius integrálható:

$$\int x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x)\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x^2+1)(\ln\left(x^2+1\right)-1)$$
$$\int x\ln(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x)\ln(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2(\ln\left(x^2\right)-1)$$
$$* = \int_{x=0}^{1} x\ln(x^2+1) - x\ln(x^2)\,\mathrm{d}x = \ln(2) - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 = \ln(2) - 1$$

Hiszen tudjuk:

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x = x(\ln(x)-1)$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x\ln(x^2) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{\frac{-1}{x^2}} = 0$$

Integrálás normáltartományon

1.

$$T = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$
$$f(x,y) = y\sqrt{1+x^2}$$

$$\int_T f = ?$$

9. gyakorlat 11. gyakorlat