Tartalomjegyzék

Implicitfüggvény

Az egyenlettel megadott függvények esetén olyankor is ki tudjuk számítani a derivált értékét (adott pontban), ha nem rendezzük y-ra az egyenletet. Persze ekkor fel kell tennünk, hogy legalább elivleg kifejezhet? y az egyeneltb?l és a kifejezés, amit kapunk differenciálható.

Az

$$F(x,y)=c \qquad (F:H\times K\to L)$$

egyenlet által meghatározott implicit függvénynek nevezzük azt az

$$y:H\to K$$

függvényt melyre minden x H-ra:

$$F(x,y(x))=c$$

Példa. Deriváljuk az

$$x^2+y^2=1$$

egyenlettel megadott differenciálható implicit függvényt!

Mo. A (-1,0) és az (1,0) pontokat tartalmazó részhamazokon nem lesz differenciálható implicit függény, de az ezeket nem tartalmazó intervallumokon igen. Az y-t az x függvényének tekintve: y=y(x)

$$x^2+y(x)^2=1$$

deriválva mindkét oldalt

$$2x+2y(x)\cdot y'(x)=0$$

visszaírva y-ra:

$$2x+2y\cdot y'=0$$
$$y'=-\frac{2x}{2y}$$

a derivált.

Általában, ha van differenciálható implicitfüggvény, akkor az alábbaikat állíthatjuk:

Tétel. Ha F:I×J $\longrightarrow$ **R** téglalapon értelmezett, differenciálható függvény, létezik az F(x,y)=0 egyenletnek y: I $\longrightarrow$ J differenciálható implicit függvénye és

$$(\partial_y F)(x,y(x)) \neq 0$$

minden x I-re, akkor

$$y'(x) = -\frac{\partial_x F(x,y)}{\partial_y F(x,y)}$$

Ui., Ekkor

$$F(x,y(x)) = 0$$

ezt differenciálva (az összetett függvény deriválására vonatkozó képlettel)

$$\begin{array}{l}[dF(x,y(x))]\cdot[1,y'(x)] = 0\\ [(\partial_x F)(x,y(x)),(\partial_y F)(x,y(x))]\cdot[1,y'(x)] = 0\end{array}$$

azaz

$$1\cdot(\partial_x F)(x,y(x)) + y'(x)\cdot(\partial_y F)(x,y(x)) = 0$$

Vegyük észre, hogy a fenti példában a kritikus pontokban $\partial_y(x^2+y^2)=0$.

Tétel. Természetesen a fenti képlet akkor is felírható, ha F két többdimenziós téglalap szorzatán van értelmezve, de diffható, létezik a differenciálható implicit függvény és az F függvény y szerinti deriváltja nem nulla.

Legyen F:$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^m$ folytonosan differenciálható és tekintsük az F(**x**,**y**) = **0** egyenletet! Ha det(∂_y)F ≠ 0, akkor (**x**,**y**)-ban létezik differenciálható *y* implicitfüggvénye F-nek és

$$\partial_{\mathbf{x}} y(\mathbf{x}) = -\partial_{\mathbf{y}} F(x,y)^{-1} \circ \partial_{\mathbf{x}} F(x,y)$$

Példa. Paraméterezzük az alábbi egyenletrendszer által meghatározott halmazt!

$$\begin{array}{l}2x - y + z = 0\\ x + y + z^2 = 0\end{array}$$

Itt az (*x*,*y*)-t szeretnénk kifejezni *z*-vel:

$$\partial_{xy} F(x,y,z) = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \partial_z F(x,y,z) = \begin{bmatrix}1\\ 2z\end{bmatrix}$$

$$\partial_{xy}F(x,y,z)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\varphi'(z)=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1+2z\\ 1-4z\end{bmatrix},\qquad (x(t),y(t),z(t))(t)=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}t+t^2\\ t-2t^2\\ 3t\end{bmatrix}$$

Implicit megadású **függvény**r?l akkor beszélünk, amikor egy függvény megadása nem (az explicit módon) $y = f(x)$ alakban történik, hanem az x és y kapcsolatát egy mindkét változót tartalmazó

$$F(x,y)=0$$

egyenlet írja le. Például adjunk meg olyan függvényt, melynek grafikonja valamely kör egy szakasza. Az

$$x^2+y^2=1$$

egyenlet? körb?l könny? az y változót kifejezni, az $y=\sqrt{1-x^2}$ és $y=-\sqrt{1-x^2}$ alakokat kapjuk. Bonyolultabb esetekben, például a

$$\sin y = x$$

esetén semmi reményünk, hogy az y változóra valamilyen egyenletrendezéssel általános képletet kapjunk. Az ilyen példák miatt nevezik ezeket a típusú függvényeket *implicit*, avagy régi, választékos kifejezéssel élve *bennrekedt* függvényeknek. A differenciálszámítás szempontjából megelégedhetünk azzal, ha az implicit függvény deriváltját ki tudjuk számolni. Sok esetben ebb?l már következtethetünk a függvényre vagy annak viselkedésére is.

A modern analízis szemszögéb?l egy N × M $\longrightarrow$ K normált terek között ható F függvény a N és b M pontokhoz tartozó implicit függvényén olyan, az a egy U környezetén értelmezett és a b egy V környezetébe képez? f:$U \longrightarrow V$ függvényt értünk, melyre f(a)=b és minden x U pont esetén rendelkezik az

$$F(x,f(x))=0$$

tulajdonsággal. Amelyet szavakban úgy fogalmazhatunk meg, hogy az F(x,y)=0 egyenletb?l az y változó kifejezhet? y=f(x) alakban.

Most szorítkozzunk csak a kétváltozós esetre és tegyük fel, hogy létezik differenciálható implicit függvénye a differenciálható F függvénynek. Ekkor az F(x,y) függvény implicit függvénye az f(x), ha egy adott (u,v) pontban:

F(u,v)=0 és
minden az f értelmezési tartományába es? x-re F(x,f(x)) 0 és
f(u)=v,

akkor világos, hogy ha

0 (x) = F(x,f(x)) = (F ○ (id,f))(x) ,

akkor

'(x) 0

így tehát a függvénykompozíció deriválásának szabálya szerint:

$$\varphi'(u) = [\partial_1 F(u,v), \partial_2 F(u,v)] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ f'(u) \end{bmatrix} = \partial_1 F(u,v) + \partial_2 F(u,v) \cdot f'(u) = 0$$

így

$$f'(u) = -\frac{\partial_1 F(u,v)}{\partial_2 F(u,v)}$$

Implicitfüggvény tétel

Tétel ? *Implicitfüggvény-tétel **R**-beli implicit függvényre* ? Legyen *F* az $\mathbf{R}^2$ egy részhalmazán értelmezett, **R**-be képez? differenciálható függvény, mely az értelmezési tartománya egy *(a,b)* bels? pontjában folytonosan differenciálható, F(a,b) = 0 és

$$\partial_2 F(a,b) \neq 0$$

(azaz (a,b)-ben az *y* szerinti parciális deriváltja nem nulla). Ekkor van a-nak olyan *I* és b-nek olyan *J* környezete, hogy F-nek egyértelm?en létezik az (a,b) párhoz tartozó f: $I \longrightarrow J$ implicit függvénye, mely er?sen differenciálható a-ban és deriváltja:

$$f'(a) = -\frac{\partial_1 F(a,b)}{\partial_2 F(a,b)}$$

Vázlatos bizonyítás. I. El?ször megkonstruáljuk az y=y(x) függvényt. Létezik olyan I × J Dom(F) az (a,b) körül, hogy ∂_2F sehol sem nulla, azonos el?jel? -- s?t feltehetjük, hogy pozitív. Ez amiatt van, hogy ∂_2F(a,b) ≠ 0 és ∂_2F folytonos.

Az y=y(x) implicit függvény létezése egyenérték? azzal, hogy

minden *x* *I*-re az F(x , .) parciális függvénynek zérushelye van J-ben,

hiszen ekkor minden x-hez létezik olyan *y* J, hogy F(x,y)=0. Belátjuk, hogy minden ilyen x-hez *egyetlen* zérushelye van F(x , .)-nek.

Tekintsük a folytonos F(a , .) parciális függvényt. A pozitívra választott y-szerinti deriváltból következik, hogy ez *I*-n szigorúan monoton növekv?. Mivel b-ben zérushelye van (F(a,b)=0), ezért van olyan y_2 > b pont, hogy ott F(a , .) pozitív és y_1 < b pont, hogy ott F(a , .) negatív. Ekkor F folytonossága miatt van az (a,y_1) pontnak olyan környezete, ahol F negatív és van az (a,y_2) pontnak olyan környezete, ahol F pozitív. Most definiáljuk át *I*-t és J-t úgy, hogy *I* × J-n az F egy J-beli elem fölött mindenhol pozitív, egy J-beli elem alatt mindehol negatív értéket vegyen föl.

A praciális deriváltak folytonosságából az is következik, hogy minden x *I*-re az F(x , .) függvény is szigorúan monoton növekv?, negatív és pozitív értéket is felvev? folytonos függvény, így a Bolzano-tétel alapján létezik y_x zérushelye és mindegyiknek egyetlen zérushelye létezik.

II. Állítjuk, hogy a :$I \longrightarrow$ J, x $\longmapsto$ y_x függvény implicit függvénye F-nek, azaz minden x *I*-re F(x, (x))=0.

Könnyen belátható, hogy folytonos a-ban, hiszen ha a-hoz közeledve mindig találnánk olyan x pontot, hogy (x) egy adott -nál mindig jobban eltér b-t?l, akkor (x) egy olyan környezetbe esne bele, ahol F mindenhol egy pozitív számnál nagyobb vagy mindenhol egy negatív számnál kisebb. Ám, F(x, (x))=0, így ez ellentmondana F folytonos tulajdonságának.

III. Végül az implicit függvény differenciálható a-ban, mert ha van (a,b)-ben érint?sík, akkor az az érint?egyenesben metszi az [x,y] síkot.

Példák

Tekintsük a következ? egyenlet? síkgörbét:

$$x^5 + xy + y^5 = 3$$

Nem lenne könny? feladat kifejezni bel?le y-t, mert az ötödfokú egyenletnek nincs általános megoldóképlete. Mivel a baloldal akárhányszor differenciálható, ezért joggal feltételezhetjük, hogy bizonyos pontokban létezik implicit függvénye. Tegyük fel, hogy ilyen függvény. Ekkor az egyenlet

$$x^5 + x\varphi(x) + (\varphi(x))^5 = 3$$

alakú, melynek minden olyan x-nél, ahol differenciálható:

$$5x^4 + \varphi(x) + x\varphi'(x) + 5\varphi^4(x) \cdot \varphi'(x) = 0$$

ahonnan a derivált: $\varphi'(x) = -\frac{5x^4 + \varphi(x)}{5\varphi^4(x) + x}$ vagy szimbolikusan: $y' = -\frac{5x^4 + y}{5y^4 + x}$. Alaposabb vizsgálatokkal kideríthet?, hogy ez a derivált minden pontban létezik és negatív, így az implicit függvény mindenhol létezik és szigorúan monoton csökken?. Vegyük észre, hogy a nevez?ben lév? kifejezés pont $\partial_y F(x,y)$ és az implicit függvény létezésének feltétele pont a nevez? nullától különböz? volta.

Többváltozós eset

Ebben az esetben is az ?érint?sík? végtelenül közelít? tulajdonsága játszik majd fontos szerepet. Jól látható az összefüggés, ha feltesszük, hogy *F* egy $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$-en értelmezett affin függvény, azaz egy lineáris leképezés eltoltja. Ekkor

$$F(x,y) = F(a+h,b+k) = F(a,b)+dF_1(a,b)h+dF_2(a,b)k.$$

Amennyiben $y = y(x)$ olyan, hogy $y(a) = b$ és $F(x,y(x)) = 0$, akkor fennáll a $0 = dF_1(a,b)h + dF_2(a,b)k$ egyenl?ség és *k* kifejezhet?, amennyiben az $A = dF_2(a,b)$ mátrix invertálható. A $B = dF_1(a,b)$ jelöléssel ekkor

$$k = -(A^{-1} \cdot B)\, h.$$

Általános esetben ez csak egy másodrend?en kicsiny tag hozzávételével lesz igaz, de az implicit függvény létezésének belátásához szükséges a fenti gondolatmenet is.

Banach-terek esetén (melyek akár végtelen dimenziósak is lehetnek) a tétel a következ?.

Tétel ? *Implicitfüggvény-tétel Banach-terekre* ? Legyen E, H, G Banach-terek, F:E × H $\longrightarrow$ G olyan függvény, mely (a,b) E × H-ban er?sen differenciálható. Ha a ∂_2F(a,b) lineáris leképezés injektív és az inverzével együtt folytonos, akkor egyértelm?en létezik az F-nek egy az (a,b) párhoz tartozó f lokális implicit függvénye, ez er?sen differenciálható a-ban és differenciálja:

$$df(a) = -(\partial_2 F(a,b))^{-1} \circ (\partial_1 F(a,b))$$

Vagy egy kevésbé absztrakt tétel:

Tétel ? *Implicitfüggvény-tétel $\boldsymbol{R}^n$-re* ? Legyen F:$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^m$ folytonosan differenciálható függvény, (a,b) $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ olyanok, hogy F(a,b)=0 és $\det\left(\frac{\partial F_i(a,b)}{\partial y_k}\right)_{i,k=1,\ldots,m} \neq 0$. Ekkor egyértelm?en létezik F-nek egy az (a,b)-hez tartozó lokális implicit függvénye.