Ez az szócikk a Matematika A2a 2008 alszócikke.

Tartalomjegyzék

Kétváltozós függvények szemléltetése

a) $f(x,y)=x^2+y^2, \qquad g(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$

b) $h(x,y)=x-y \qquad k(x,y)=\frac{1}{x-y}$

Ábrázoljuk ?ket a wolfram alfán:

[wolframalpha 3D Plots|http://www.wolframalpha.com/examples/PlottingAndGraphics.html]

Ezek (x,y,z) koordinátarendszerbeli z=f(x,y) felülettel ábrázolva hengerszimmetrikusak, érdemes az

$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$

polárkoordináta transzformációval átírni, ebben $r=\sqrt{x^2+y^2}$ a z-tengelyt?l mért távolság, és az els? és második (majd a második és harmadik síknegyedben): $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}(+\pi)$

Innen: $f(r)=r^2$ z körül körbeforgatott parabola (forgási paraboloid)

$\mathrm{Dom}(g)=\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ és $g(r)=\frac{1}{r^2}$ másodfokú hiperbola körbeforgatva.

Mindkett? szintvonalai körök.

b) h(x,y)=z=x-y egy sík egyenlete, szintvonalai: c=x-y, y=x-c egyenesek.

$\mathrm{Dom}(k)=\mathbf{R}^2\setminus\{(x,y)\mid y=x\}$ szintén egyenesek a szintvonalak: $y=-\frac{1}{c}+x$.

Határérték

Def. Tegyük fel, hogy az $f:\mathbf{R^2}\supset\!\!\to \mathbf{R}$ függvény értelmezési tartományának (x ,y) torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy f-nek létezik határértéke az (x_0,y_0) pontban, és ez az A szám, ha 0 0

minden >0-ra létezik >0, hogy $f\left(\dot{\mathrm{B}}_\delta(x_0,y_0)\right)\subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(A)$

Ilyenkor $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ -t vagy $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f=A$ -t írunk.

Rend?relv. Legyen $f,g,h:U\to\mathbf{R}$ és $(x_0,y_0)\in U'$. Ha van olyan >0, hogy minden $(x,y)\in \mathrm{B}_\delta(x_0,y_0)\cap U$ -ra

$$g(x,y)\leq f(x,y)\leq h(x,y)$$

és $\exists \lim\limits_{(x_0,y_0)} g=A$ és $\exists \lim\limits_{(x_0,y_0)} h=A$, akkor

$$\exists \lim_{(x_0,y_0)} f=A$$

Határérték nem létezésének jellemzése. Tegyük fel, hogy az $f:\mathbf{R^2}\supset\!\!\to \mathbf{R}$ függvény értelmezési tartományának (x_0,y_0) torlódási pontja. f-nek nem létezik véges határértéke az (x_0,y_0) pontban, pontosan akkor, ha léteznek olyan $(\mathbf{x}_n)$ és $(\mathbf{x}'_n)$ sorozatok, hogy $\mathbf{x}_n\to(x_0,y_0)$ és $\mathbf{x}'_n\to(x_0,y_0)$, de $f(\mathbf{x}_n)$ vagy $f(\mathbf{x}'_n)$ nem konvergensek, vagy ha igen, akkor $\lim f(\mathbf{x}_n)\neq \lim f(\mathbf{x}'_n)$.

Folytonosság. Legyen $f:\mathbf{R^2}\supset\!\!\to \mathbf{R}$ és $(x_0,y_0)\in \mathrm{Dom}(f)$. Azt mondjuk, hogy f folytonos az (x_0,y_0) pontban, ha

minden >0-ra létezik >0, hogy $f\left(\mathrm{B}_\delta(x_0,y_0)\right)\subseteq \mathrm{B}_\varepsilon(f(x_0,y_0))$

Ha $f:\mathbf{R^2}\supset\!\!\to \mathbf{R}$ olyan, hogy $(x_0,y_0)\in \mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(f)'$, akkor $f\in C(x_0,y_0)$ pontosan akkor, ha $\exists \lim\limits_{(x_0,y_0)} f=f(x_0,y_0)$.

1. Hol létezik határértéke az

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

függvénynek? ("http://wiki.math.bme.huA félév függvénye."http://wiki.math.bme.hu)

Megoldás. Világos, hogy a polárkoordináta transzformációval az r kiesik és csak -t?l függ. Ezért érdemes a (0,0) pontot több irnyból, sugárirányba megközelíteni, általánosan az $y = mx$

egyenes mentén:

$$f(x,mx)=\frac{xmx}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

Vagyis m=0-ra ez 0-t, m=1-re ez 1/2-et ad. Eszerint nincs a (0,0)-ban határérték, mert van két különböz? határérték? függvényértéksorozat, miközben a sorozatokkal a (0,0)-ba tartunk.

2. Hol létezik határértéke az

$$f(x,y)=\frac{y}{x}$$

függvénynek?

MO.: Mindenütt folytonos, ahol értelmezve van, de nincs hatérértéke másutt, ugyanis:

$$\mathrm{Dom}(Q)=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,y)\mid y\in\mathbf{R}\}$$

Polárkoordinátákra áttérve:

$$Q(r,\varphi)=\mathrm{tg}(\varphi)$$

ami független *r*-t?l, tehát pl a (0,0)-beli határérték attól függ, hogy hogy közelítünk a 0-hoz.

3. Hol létezik határértéke az

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$$

függvénynek?

4. Hol létezik határértéke az

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

függvénynek? (Használjuk az $|f(x,y)|\leq g(r)\underset{r\to 0}{\longrightarrow}0$, akkor $f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$ "http://wiki.math.bme.hurend?relvet"http://wiki.math.bme.hu, ahol $r=\sqrt{x^2+y^2}$, vagy vegyük észre a "http://wiki.math.bme.hufélév függvényét"http://wiki.math.bme.hu.)

1. megoldás (polártranszf.). $x = r \cdot \cos(\ )$, $y = r \cdot \sin(\ )$:

$$f(x(r,\varphi),y(r,\varphi))=\frac{r^3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^2}=r\cdot\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)$$

Ami 0-hoz tartó szor korlátos, amennyiben (x,y) $\longrightarrow$ (0,0) ((x,y) tart 0 esetén r tart a 0-hoz, a trigonometrikusak megmindenhogy nézve korlátosak), azaz a határérték 0.

2. megoldás (mértani-négyzetes közepek). $|x||y| \leq (x^2+y^2)/2$. Emiatt:

$$|\frac{xy}{x^2+y^2}| \leq \frac{1}{2}$$

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|y|$$

Ha (x,y) $\longrightarrow$ (0,0), akkor persze |*x*| $\longrightarrow$ 0 és a többi tényez? szorzata korlátos (éspedig -1/2 és 1/2 közötti), hiszen a hányados kisebb egyenl? 1. Ezért a határérték 0.

5. Hol létezik határértéke az

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

függvénynek? (Használjuk az "http://wiki.math.bme.hu$x^2 = y^4$"http://wiki.math.bme.hu trükköt! $y=\sqrt{x}$)

6. Mi a határértéke rögzített -re?

$$g(r,\varphi)=\frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi+r^4\sin^4\varphi}$$

függvénynek?

7. Hol létezik határértéke az

$$f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^4}$$

függvénynek? (Vegyük észre a "http://wiki.math.bme.hufélév függvényét"http://wiki.math.bme.hu, vagy írjuk fel a számtani és mértani közép közötti egyenl?tlenséget a nevez? tagjaira.)

8. HF. Hol létezik határértéke az

$$f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

függvénynek?

IMSc Kiegészítés

Sorozatok konvergenciája normált térben

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat **konvergens** az (*E*, ||.||) normált térben és határértéke a *u* *E* pont, ha

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N_\varepsilon\in\mathbf{Z}^+ \quad \forall n\in\mathbf{Z}^+ \qquad n>N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad a_n\in B_\varepsilon^{||\cdot||}(u)$$

Komponenssorozatok $\mathbf{R}^m$-ben

(a_n):$\mathbf{Z}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^m$ akkor és csak akkor konvergens, ha komponenssorozatai konvergensek.

$$\begin{array}{l} a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, ..., a_n^{(1)}, ... \\ a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, ..., a_n^{(2)}, ... \\ \vdots \\ a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, ..., a_n^{(m)}, ... \end{array}$$

Ugyanis, ha konvergens, akkor a maximumnormában is konvergens, azaz > 0-hoz létezik N természetes szám, hogy minden n > N természetes számra

$$\max\{|a_n^{(1)} - A^{(1)}|, |a_n^{(2)} - A^{(2)}|, ..., |a_n^{(m)} - A^{(m)}|\} < \varepsilon$$

amib?l következik, hogy minden n> N-re egyenként:

$$|a_n^{(1)} - A^{(1)}| < \varepsilon, \quad |a_n^{(2)} - A^{(2)}| < \varepsilon, ..., |a_n^{(m)} - A^{(m)}| < \varepsilon$$

azaz mindegyik komponenessorozata konvergens.

Megfordítva. Tegyük fel, hogy tetsz?leges > 0-ra léteznek { N_i} (i=1...m) természetes számok, hogy:

$$\forall n > N_1 \quad |a_n^{(1)} - A^{(1)}| < \varepsilon, \qquad \forall n > N_2 \quad |a_n^{(2)} - A^{(2)}| < \varepsilon, \quad ..., \quad \forall n > N_m \quad |a_n^{(m)} -$$

ha tehát N= max{N_i}, akkor minden n > N-re

$$|a_n^{(1)} - A^{(1)}| < \varepsilon, \quad |a_n^{(2)} - A^{(2)}| < \varepsilon, ..., |a_n^{(m)} - A^{(m)}| < \varepsilon$$

azaz

$$\max\{|a_n^{(1)} - A^{(1)}|, |a_n^{(2)} - A^{(2)}|, ..., |a_n^{(m)} - A^{(m)}|\} < \varepsilon \,,$$

azaz a sorozat a maximumnormában konvergál az A = ($A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... , $A^{(m)}$) koordinátájú ponthoz, így az euklideszi normában is.

Példák

1. $\mathbf{R}^2$-ben.

$$a_n = \begin{pmatrix} 3 + \frac{1}{n}\cos(n\pi/4) \\ \\ 2 + \frac{1}{n}\sin(n\pi/4) \end{pmatrix}$$

Két hasznos dolgot jegyezzünk meg:

Tétel $\mathbf{R}^m$-ben minden norma ekvivalens, azaz ugyanazokat a nyílt halmazokat határozza meg. (Tehát, mindegy melyiket használjuk, a nyílt, zárt halmazok topológiai fogalmak (innen pedig a konvergencia is) ugyanaz lesz.

2. *B*[*a*,*b*]-ben.

Legyen B[a,b] a korlátos és zárt [a,b] intervallumon értelmetezett korlátos függvények sorozata. Ebben a térben a távolságot a szuprémumnormából származtatjuk:

$$||f-g||_\infty = \sup \mathrm{Ran}(|f-g|)\} = \sup\{|f(x)-g(x)|\ :\ x\in[a,b]\}$$

azaz gyakorlatilag a "http://wiki.math.bme.hulegnagyobb függvényérték különbség"http://wiki.math.bme.hu. Ekkor egy pont, azaz egy függvény sugarú környezete egy 2 vastag szimmetrikus sáv a függvény grafikonja körül.

2.1. B[-1000,+1000]-ben az

$$f_n = exp + \frac{1}{n}\sin \qquad (f_n(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{n}\sin(x))$$

sorozat (függvénysorozat) konvergens a szuprémumnormában. Ezt az el?adás alapján úgy fog nevezni, hogy **egyenletesen konvergens**.

2. B[-2,+2]-ben a páratlan gyökkitev?j? gyökfüggvények függvénysorozata

$$f_n = \sqrt[2n+1]{.} \qquad (f_n(x) = \sqrt[2n+1]{x})$$

nem konvergens a szuprémumnormában(!). Az el?adáson azt mondjuk majd, hogy nem egyenletesen konvergens. Viszont mint függvénysorozat **pontonként konvergens** lesz és a szignumfüggvényhez mint határfüggvényhez tart.

3. $\ell_\infty(\mathbf{R})$ Ez a korlátos sorozatok tere. Itt a

$$s_n(m) : \begin{cases} 1, & \text{ha } m < n \\ 0, & \text{ha } m \geq n \end{cases}$$

sorozatnak nincs konvergens részsorozata. Ez azért van, mert a sorozat bármely két különböz? tagjának különbsége 1, így akárhogy is veszünk egy részsorozatát, az nem lesz Cauchy-sorozat, tehát konvergens sem lehet.

1. gyakorlat 3. gyakorlat