Ez az szócikk a Matematika A2a 2008 alszócikke.

Ezen a konkrét gyakorlaton konkrét függvények konkrét folytonosságát és konkrét határértékét vizsgáljuk meg konkrét módon.

Tartalomjegyzék

- 1 További példák
- 2 Parciális deriváltak
- 3 Lineáris leképezések
  - 3.1 Példák
- 4 Differenciálhatóság
  - 4.1 Definíció és folytonosság
  - 4.2 Parciális differenciálhatóság és differenciálhatóság
  - 4.3 Iránymenti deriválhatóság és differenciálhatóság
- 5 Folytonos parciális differenciálhatóság
  - 5.1 Példa
  - 5.2 Példa

További példák

1. Hol létezik határértéke az alábbi függvényeknek?

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^6}$

b) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2y^3)}{x^4+y^4}$ (Használjuk az $\dfrac{\sin\vartheta}{\vartheta} \xrightarrow[\vartheta\to 0]{} 1$ határértéket.)

c) $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

d) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{tg}(x^2y)}{e^{x^2+y^2}-1}$

e) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{\sqrt[5]{x^2+y^2}}$

f) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg}(xy)}{x^2+y^2}$

g) $f(x,y) = \dfrac{x^4y}{x^6+y^4}$

h) $f(x,y) = \dfrac{x^4y}{x^4+y^8}$

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{\sqrt[3]{x^4+y^8}}$

k) $f(x,y) = \dfrac{xy^4}{\sqrt{x^4+y^8}}$

Parciális deriváltak

Definíció. Legyen *f*: $\mathbf{R}^n \supset\rightarrow \mathbf{R}$, *u* int Dom(*f*). Azt mondjuk, hogy f parciálisan differenciálható az *u* pontban a x_i változó szerint, ha az

$$f(u_1, ..., ., ..., u_n) : x_i \mapsto f(u_1, ...x_i, ..., u_n)$$

egyváltozós valós függvény differenciálható az u_i pontban. Ekkor a fenti függvény u_i-beli deriváltját

$$\partial_i f(u), \quad f'_{x_i}(u), \quad f_{x_i}(u), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=u}$$

jelöli.

Példa:

$$\frac{\partial x^2 \cdot \sin(y)}{\partial x} = 2x \cdot \sin(y)$$
$$\frac{\partial x^2 \cdot \sin(y)}{\partial y} = x^2 \cdot \cos(y)$$
$$\frac{\partial x^2 \cdot \sin(y)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sin(\mathrm{sh}(x)y^2)}{\partial x} = \cos(\mathrm{sh}(x)y^2) \cdot \mathrm{ch}(x)y^2$$

Feladat. Parciálisan deriválható-e az

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a (0,0)-ban?

Feladat. Parciálisan deriválható-e az

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \\ (x^2 + y) \sin \frac{1}{|x|+|y|}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

a (0,0)-ban?

Lineáris leképezések

A V_1 és V_2 vektorterek között ható *A* leképezést akkor nevezünk lineárisnak, ha teljesül minden , μ **R** és **v**, **u** V_1

$$\mathcal{A}(\lambda.\mathbf{v} + \mu.\mathbf{u}) = \lambda.\mathcal{A}\mathbf{v} + \mu.\mathcal{A}\mathbf{u}$$

A definícióból rögtön következik, hogy a nulla vektor képe nulla:

$$\mathcal{A}\mathbf{0}_{V_1} = \mathbf{0}_{V_2}$$

viszont más elem a V_2 nem feltétlenül vétetik föl.

Véges dimenziós terek közti lineáris leképezés a bázis választásával egyértelm?en jellemezhet? az alábbi mátrixszal.

$$[\mathcal{A}]_{B,C} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \mathcal{A}\mathbf{b}_1 & \mathcal{A}\mathbf{b}_2 & \dots & \mathcal{A}\mathbf{b}_n \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

ahol $B = (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,?,\mathbf{b}_n)$ a V_1 egy bázisa, C az V_2 bázisa, a mátrix oszlopai pedig a B elemeinek $\mathcal{A}$ általi képvektoraiból, mint oszlopvektorokból áll. Ha $\mathcal{A}\ V \longrightarrow V$ típusú, akkor csak $[\mathcal{A}]_B$-t szokás írni, ha pedig pusztán $[\mathcal{A}]$-t írnak, akkor az azt jelenti, hogy a $\mathbf{R}^n$ *sztenderd bázis*áról van szó, azaz a

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

vektorrendszerr?l.

Példák

1. Forgatás az origo körül szöggel:

$$[\mathcal{F}_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Világos, hogy ez invertálható leképezés és az inverze a - szög? forgatás.

2. Tükrözés a sz?g? egyenesre.

$$[\mathcal{T}_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{bmatrix}$$

Világos, hogy ez is invertálható és inverze saját maga.

Ezek ortogonális transzformációk, azaz a transzponáltjuk az inverzük. Speciálisan a tükrözés szimmetrikus leképezés, mert mátrixa szimmetrikus. S?t, ezek alkotják a síkon az összes ortogonális transzformációt.

3. Deriváló operáció. Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomfüggvények tere. Ekkor a

$$\mathcal{D} : f \mapsto f'$$

lineáris leképezés:

Bázis *V*-ben: {1, x, x^2}, ezért a mátrixa:

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Világos, hogy a leképezés képzere nem a teljes *V*, hanem annak egy altere (a legfeljebb els?fokú polinomfüggvények tere) és nem csak a 0 polinom képe 0, hanem minden konstans polinomé.

Differenciálhatóság

Definíció és folytonosság

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R}^n \supset\to \mathbf{R}^m$ függvény (totálisan) differenciálható az $u \in \operatorname{int} \operatorname{Dom}(f)$ pontban, ha létezik olyan $\mathbf{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés, hogy

$$\exists \lim_{x \to u} \frac{f(x) - f(u) - \mathbf{A} \cdot (x - u)}{||x - u||} = \mathbf{0}$$

Ez az **A** lineáris leképezés egyértelm? és ha kell, df(u)-val jelöljük.

Egy ezzel ekvivalens megfogalmazást is kimondunk, ami rendkívül jól használható feltétel lesz kés?bb. A fenti *f* differenciálható az értelmezési tartományának bels? *u* pontjában, ha létezik olyan $\varepsilon : \operatorname{Dom}(f) \to \mathbf{R}^m$ függvény és $\mathbf{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés, hogy

1) minden $x \in \operatorname{Dom}(f)$-re: $f(x) = f(u) + \mathbf{A}(x - u) + \varepsilon(x)||x - u||$ és
2) $\varepsilon \in \mathrm{C}(u)$ és $\varepsilon(u) = 0$.

Ebb?l rögtön következik, hogy differenciálható függvény folytonos.

Deriválható-e az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény?

Parciális differenciálhatóság és differenciálhatóság

Ha *f*:$\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ (totálisan) differenciálható az értelmezési tartományának *u* bels? pontjában, akkor *f* parciálisan differenciálható *u*-ban és df(u) mátrixa a sztenderd bázisban:

$$[\mathrm{d}f(u)] = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \dots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & & \\ \partial_{x_1} f_m & \dots & \partial_{x_n} f_m \end{bmatrix}$$

Bizonyítás. B?ven elég egy komponensfüggvénnyel rendelkez? függvényre igazolni. A határérték és függvénykompozíció kapcsolatára vonatkozó tétel szerint, ha *a* bels? pontja a Dom(g)-nek, g injektív és g(a) bels? pontja Dom(h)-nak és létezik g-nek (véges) határértéke *a*-ban és h-nak a g-nek az *a*-beli határértékében, akkor a hog-nek is létezik *a*-ban határértéke és

$$\lim_{(\lim_a g)} h = \lim_a (h \circ g)$$

Innen a $g{:}x(t) = u + te_i$ függvénnyel(, ahol e_i az i-edik sztenderd báziselem) és az $a = 0$ ponttal teljesül, hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(u) - \mathbf{A}(x-u)}{||x-u||} = 0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(u+te_i) - f(u) - \mathbf{A}(te_i)}{||te_i||}$$

$$0 = \lim_{t \to 0+} \frac{f(u+te_i) - f(u) - \mathbf{A}(te_i)}{||te_i||} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(u+te_i) - f(u) - t\mathbf{A}e_i}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(u+$$

$$0 = \lim_{t \to 0-} \frac{f(u+te_i) - f(u) - \mathbf{A}(te_i)}{||te_i||} = \lim_{t \to 0-} \frac{f(u+te_i) - f(u) + t\mathbf{A}e_i}{-t} = \lim_{t \to 0-} \frac{f(u+$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(u+te_i) - f(u)}{t} = \partial_{x_i} f(u) = \mathbf{A}e_i$$

Példa. Tekintsük az

$$g(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{xy}{x^2+y^2} \\ x+y \end{pmatrix} & , \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & , \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ekkor

$$J^g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Viszont g nem totálisan diffható, mert a (t,t) mentén a (0,0)-ba tartva:

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(t,t) - g(0,0) - J^g(0,0) \cdot (t,t)}{\sqrt{2}|t|} = \lim_{t \to 0} \frac{(\frac{1}{2}, 2t) - (0,t)}{\sqrt{2}|t|} = \lim_{t \to 0} \frac{(\frac{1}{2}, t)}{\sqrt{2}|t|} = \lim_{t \to 0} (\frac{1}{\sqrt{22}|t|}$$

ami nem létezik.

Persze g nem folytonos, és így nem is lehet totálisan differenciálható.

Példa. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$

Iránymenti deriválhatóság és differenciálhatóság

Ha e tetsz?leges egységvektor, akkor

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(u+te)-f(u)}{t}=\partial_e f(u)=[\operatorname{grad} f(u)]\cdot e=[\nabla f(u)]\cdot e$$

Példa.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, ha} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{, ha} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Ekkor

$$\mathrm{J}^f(0,0)=[0,0]$$

Ha tehát differenciálható, akkor az **iránymenti deriváltak** (Gateau-deriváltak) is léteznek (e egységvektor):

$$\partial_e f(u)=\lim_{t\to 0}\frac{f(u+te)-f(u)}{t}=\mathrm{J}^f(0,0)\cdot e=e\cdot\operatorname{grad} f(u)$$

Ám, polárkoordinátákra áttérve:

$$f(x(r,\varphi),y(r,\varphi))=\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r}=r\cos\varphi\sin\varphi=r\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

= /4-et és + /4-et véve a vetületfüggvény a

$$t\mapsto\frac{1}{2}|t|$$

,

ami nem differenciálható a 0-ban.

Megjegyzés. Persze abból, hogy az összes iránymenti derivált létezik, abból nem következik, hogy a függvény totálisan deriválható:

Folytonos parciális differenciálhatóság

Megfordításról a következ? esetben beszélhetünk.

Tétel. Ha az f:$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ függvény minden parciális deriváltfüggvénye létezik az u egy környezetében és u-ban a parciális deriváltak folytonosak, akkor u-ban f differenciálható. (S?t, folytonosan differenciálható.)

Bizonyítás. Elegend? az m = 1 esetet vizsgálni. Továbbá a bizonyítás elve nem változik, ha csak az n = 2 esetet tekintjük. Legyen x az u mondott környezeteb?l vett pont, és x = (x_1,x_2), v=(u_1,x_2), u=(u_1,u_2) Ekkor az [x,v] szakaszon ∂_1f-hez a Lagrange-féle középértéktétel miatt létezik olyan (x_1) [x_1,u_1] szám, és a [v,u] szakaszon ∂_2f-hez (x_2) [x_2,u_2] szám, hogy

$$f(x)-f(u)=f(x)-f(v)+f(v)-f(u)=$$
$$=\partial_1 f(\xi(x_1),x_2)(x_1-u_1)+\partial_2 f(u_1,\zeta(x_2))(x_2-u_2)=$$
$$=\partial_1 f(u)(x_1-u_1)+\partial_2 f(u)(x_2-u_2)+$$
$$+(\partial_1 f(\xi(x_1),x_2)-\partial_1 f(u))(x_1-u_1)+(\partial_2 f(u_1,\zeta(x_2))-\partial_2 f(u))(x_2-u_2)$$

itt az

$$\varepsilon_1(x)=\partial_1 f(\xi(x_1),x_2)-\partial_1 f(u) \text{ és } \varepsilon_2(x)=\partial_2 f(x_1,\zeta(x_2))-\partial_2 f(u)$$

függvények folytonosak *u*-ban (még ha a , függvények nem is azok), és értékük az *u*-ban 0. Világos, hogy ez azt jelenti, hogy f differenciálható *u*-ban.

Világos, hogy a parciális deriváltak folytonossága szükséges a fenti tételben. Az alábbi példában léteznek a parciális deriváltfüggvények az *u* egy környezetében, de az *u*-ban nem folytonosak.

Példa

A differenciálhatóság azonban nem elég ahhoz, hogy a parciális deriváltak folytonosak legyenek.

Az

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

differenciálható, hiszen ez az

$$f(\mathbf{r})=\begin{cases}\mathbf{r}^2\cdot\sin(|\mathbf{r}|^{-2}) & \text{ha} \quad \mathbf{r}\neq\mathbf{0}\\ \\ \mathbf{0}, & \text{ha} \quad \mathbf{r}=\mathbf{0}\end{cases}$$

függvény és $\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$-ban:

$$\operatorname{grad}(f)=\sin(|\mathbf{r}|^{-2}).\operatorname{grad}\mathbf{r}^2+\mathbf{r}^2.\operatorname{grad}\sin(|\mathbf{r}|^{-2})=$$
$$=\sin(|\mathbf{r}|^{-2}).2\mathbf{r}+\mathbf{r}^2\cdot\cos(|\mathbf{r}|^{-2})\cdot(-2)|\mathbf{r}|^{-3}.\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Példa

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

1) Polárkoordinátásan könnyen kijön, hogy ez a függvény totálisan deriválható. Parciális deriváltjai a 0-ban: 0.

2) Melyek a második parciális deriváltjai a 0-ban?

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4y - x^2y^3 + 3x^2y^2 - y^5 - 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_1(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\cdot 0 + x^2\cdot 0^3 + 3x^2\cdot 0^2 - 0^5}{x(x^2+0^2)^2} = 0$$

$$\partial_2(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{0^4 y + 0^2 y^3 + 3\cdot 0^2 y^2 - y^5}{y(0^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^5}{y^5} = -1$$

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \\ \frac{}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0)0 \end{cases}$$

$$\partial_1(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{x\to x_0} \frac{klkj}{asdsa}$$

2. gyakorlat pótló gyakorlat