Ez az szócikk a Matematika A2a 2008 alszócikke.

Tartalomjegyzék

Teljes differenciálhatóság, gyakorlás

1. Hol deriválható?

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^4+y^4}$$

2. Hol deriválható?

$$\begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Iránymenti deriválhatóság és differenciálhatóság

Ha e tetsz?leges egységvektor, akkor

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(u+te)-f(u)}{t}=\partial_e f(u)=[\mathrm{grad}\, f(u)]\cdot e=[\nabla f(u)]\cdot e$$

Példa.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, ha} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{, ha} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Ekkor

$$\mathrm{J}^f(0,0)=[0,0]$$

Ha tehát differenciálható, akkor az **iránymenti derivált**ak (Gateau-deriváltak) is léteznek (e egységvektor):

$$\partial_e f(u)=\lim_{t\to 0}\frac{f(u+te)-f(u)}{t}=\mathrm{J}^f(0,0)\cdot e=e\cdot \mathrm{grad}\, f(u)$$

Ám, polárkoordinátákra áttérve:

$$f(x(r,\varphi),y(r,\varphi))=\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r}=r\cos\varphi\sin\varphi=r\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

= /4-et és + /4-et véve a vetületfüggvény a

$$t\mapsto\frac{1}{2}|t|$$,

ami nem differenciálható a 0-ban.

Illetve nézzük meg a (3,4) vektor mentén!

Megjegyzés. Persze abból, hogy az összes iránymenti derivált létezik, abból nem következik, hogy a függvény totálisan deriválható.

Széls?érték szükséges feltétele

Egyel?re állapodjunk meg abban, hogy gradiensnek nevezzük a következ? többváltozós vektorérték? függvényt: ha *f*: $\mathbf{R}^n \supset\!\!\!\longrightarrow$ **R** parciálisan differenciálható, akkor

$$\mathrm{grad}\, f(x)=(\partial_1 f(x),...,\partial_n f(x))$$

mely lényegében az *f* els?rend? parciális deriváltjaiból képezett vektor.

Kés?bb a gradienst egy kissé másképp fogjuk értelmezni és amit most definiáltunk, az a gradiens sztenderd bázisbeli mátrixa lesz (adott pontra vonatkozóan).

Tétel - *Fermat-féle szés?értéktétel* - Legyen *f*: $\mathbf{R}^n \supset\!\!\!\longrightarrow$ **R**, *u* int Dom(*f*), *f* parciálisan differenciálható *u*-ban.

Ha *u*-ban *f*-nek (lokális) széls?értéke van, akkor

$$\mathrm{grad}\, f(u)=0_{\mathbf{R}^n}$$

U.is: minden *i*-re az *i*-edik parciális függvénynek széls?értéke van u_i-ben, így az egyváltozós Fermat-tétel miatt ezeknek a deriváltja u_i-ben 0, így a gradiens értéke 0.

Példa

$$f(x,y)=x^2y^2$$

Ennek gradiense:

$$\mathrm{grad}\, f(x,y)=(2xy^2,2yx^2)$$

Az

$$\left.\begin{array}{lrcl}\mathrm{I.} & 2xy^2 & = & 0\\ \mathrm{II.} & 2yx^2 & = & 0\end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai: $x = 0$, y tetsz?leges ill. $y = 0$ és x tetsz?leges. A széls?értékek helyei csak ezek közül kerülhetnek ki és ezek valóban széls?értékek is, mert ezeken a függvény 0-t vesz fel, ami a lehetséges legkisebb értéke.

Magasabbrend? parciális deriváltak

Ha f parciálisan deriválható, akkor $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ szintén kétváltozós függvények (a pontonként a deriváltak, mint függvényértékek értelmezésével) és érdekl?dhetünk ezek parciális differenciálhatóságuk iránt. Például:

$$f(x,y) = x^2y^4 + x^5 - y^3$$

$$\partial_x f(x,y) = xy^4 + 5x^4$$
$$\partial_y f(x,y) = x^2 4y^3 - 3y^2$$

$$\partial_x(\partial_x f)(x,y) = y^4 + 20x^3$$
$$\partial_y(\partial_y f)(x,y) = 12x^2y^2 - 6y^2$$
$$\partial_y(\partial_x f)(x,y) = x4y^3$$
$$\partial_x(\partial_y f)(x,y) = 4xy^3$$

És valóban:

Tétel. (Young-tétel) Ha a másodrend? parciális deriváltak léteznek az u egy környezetében és folytonosak az u pontban, akkor az u-beli vegyes másodrend? parciláis deriváltak egyenl?ek:

$$\partial_x(\partial_y f)(u) = \partial_y(\partial_x f)(u)$$

Azaz az alábbi, úgy nevezett Hesse-mátrix szimmetrikus:

$$H^f(u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(u)}{\partial y \partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f(u)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(u)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Feladat. Az a kitétel, hogy az u-ban a másodrenr? parciláis deriváltak folytonosak, nem hagyható el, ugyanis. Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Ekkor a 0-ban nem egyenl? a két vegyes parciális derivált.

Tekintsük a parciális deriváltakat:

$$\partial_x(\partial_y f)(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{(\partial_y f)(x,0) - (\partial_y f)(0,0)}{x}$$

$$\partial_y(\partial_x f)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{(\partial_x f)(0,y) - (\partial_x f)(0,0)}{y}$$
$$\partial_x(\partial_x f)(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{(\partial_x f)(x,0) - (\partial_x f)(0,0)}{x}$$
$$\partial_y(\partial_y f)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{(\partial_y f)(0,y) - (\partial_y f)(0,0)}{y}$$

Ehhez tehát elegend? kiszámítani a következ? föggvényeket: $y \mapsto (\partial_x f)(0,y)$, $x \mapsto (\partial_y f)(x,0)$. Ehhez a parciális deriváltak:

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,y) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} 0, & \text{ha } y = 0 \\ -y, & \text{ha } y \neq 0 \end{cases}$$
$$\partial_y f(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,t) - f(0,0)}{t} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ x, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$$
$$\partial_y f(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,y+t) - f(0,0)}{t} = 0$$
$$\partial_x f(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

Megjegyezzük, hogy a $g=(\partial_x f,\partial_y f)$ függvény (0,0)-beli parciális deriváltjai nem lehetnek folytonosak, mert ott a függvény nem totálisan diffható. Ugyanis a g Jacobi-mátrixa:

$$J^g(0,0) = H^f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ami a 90?-os forgatás. Ekkor a g-t a (t,0) vektorral közelítve a 0-ba:

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t,0) - g(0,0) - J^g(0,0)\cdot(t,0)}{|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{(0,-t)}{|t|} \neq (0,0)$$

márpedig ha g minden parciális deriváltja folytonos lenne a (0,0)-ban, akkor g totálisan is deriválható lenne.

Többváltozós függvény széls?értéke

$$f(x) = f(u) + \mathrm{J}_u^f(x-u) + (x-y)\mathrm{H}_u^f(x-u) + \varepsilon(x)||x-u||^2$$

Másodikderivált-próba

Kétszer differenciálható függvényre vonatkozóan megfogalmazhatjuk a lokális maximum és minimum létezésének elégséges feltételét. Csak a kétváltozós függvényekkel foglalkozunk. Tegyük fel, hogy grad *f*(u) = 0 és $H^f(u)$ az *f* Hesse-mátrixa

1. ha det $H^f(u) > 0$ és $\partial_{11}f(u) < 0$, akkor *f*-nek *u*-ban **maximuma** van
2. ha det $H^f(u) > 0$ és $\partial_{11}f(u) > 0$, akkor *f*-nek *u*-ban **minimuma** van
3. ha det $H^f(u) < 0$, akkor *f*-nek biztosan nincs széls?értéke, ún. **nyeregpont**ja van
4. ha det $H^f(u) = 0$, akkor a próba nem járt sikerrel, azaz további vizsgálatokat igényel annak eldöntése,

hogy *u* széls?érték hely-e.

Megjegyzések. Mivel kétváltozós esetben

$$\det \mathrm{H}^f(u) = \partial_{11} f(u) \cdot \partial_{22} f(u) - (\partial_{12} f(u))^2$$

ezért olyan eset nem létezik, hogy det $H^f(u) > 0$ és $\partial_{11} f(u) = 0$.

Világos, hogy a második derivált tipikusan azoknál a függvényeknél jár sikerrel, melyeket egy másodfokú függvény közelít a legjobban (aszimptotikusan másodfokúak). Ha a függvény ennél magasabb fokú, akkor a második deriváltak elt?nnek és a Hesse-mártix elfajul (vagy legalább is tipikusan elfajul).

Ha tehát

$$\mathrm{H}^f(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$, akkor $\det \mathrm{H}^f(u) = AC - B^2$,

és így a tipikus példák a következ?k.

Példák

1. Ha B kicsi, azaz az AC-hez képest kis abszolútréték? szám, akkor a széls?érték irányába mozdul el a feladat.

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

Ekkor grad *f* = (2x + y , 2y + x) és

$$\mathrm{H}^f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz 4 - 1 = 3 > 0 és 2 > 0 miatt minimum.

2. Ha |B| nagy (azaz AC-hez képest nagy), akkor a bizonyosan nemszéls?érték irányába.

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$$

Ekkor grad *f* = (2x + -3y , 2y + -3x) és

$$\mathrm{H}^f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz 4 - 9 = -5 < 0 miatt nincs széls?érték: nyeregpont.

3. Negatív A és C-re és kis B-re:

$$f(x,y) = -x^2 + xy - y^2$$

Ekkor grad *f* = (-2x + 3y , -2y + 3x) és

$$\mathrm{H}^f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

azaz 4 - 1 = 3 > 0 és -2 < 0 miatt maximum.

4. Ha A és C el?jele ellenkez?, akkor rögtön következik, hogy nincs sz.é.

$$f(x,y) = x^2 + xy - y^2$$

Ekkor grad *f* = (2x + y , -2y + x) és

$$\mathrm{H}^f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

azaz -4 - 1 = -5 < 0 azaz nyeregpont.

5. Atipikus eset, ha AC = B^2. Ekkor nem jár sikerrel a próba:

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$$

Ekkor grad *f* = (2x + 2y , 2y + 2x) és

$$\mathrm{H}^f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

azaz 4 - 4 = 0, azaz határozatlan eset. De tudjuk, hogy

$$f(x,y) = (x+y)^2$$

ami pontosan akkor minimális, ha x = -y, azaz ezeken a helyeken van széls?érték.

6.

$$f(x,y) = 3x^2 - 6xy + 2y^3$$

7.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

pótló gyakorlat 5. gyakorlat