Differenciálhatóság

A többváltozós differenciálhatóságot az egyváltozós alábbi átfogalmazásából általánosítjuk:

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)-f(u)-m(x-u)}{|x-u|}=0$$

$$\lim_{x\to u+}\frac{f(x)-f(u)-m(x-u)}{x-u}=0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to u-}\frac{f(x)-f(u)-m(x-u)}{-(x-u)}=0$$

$$\lim_{x\to u+}\left(\frac{f(x)-f(u)}{x-u}-m\right)=0, \quad \wedge \quad \lim_{x\to u-}-\left(\frac{f(x)-f(u)}{x-u}-m\right)=0$$

$$\lim_{x\to u+}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}=m, \quad \wedge \quad \lim_{x\to u-}-\frac{f(x)-f(u)}{x-u}=-m$$

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}=m$$

Definíció. Legyen *f*: $\mathbf{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbf{R}^m$ és *u* int Dom(f). Azt mondjuk, hogy *f* **differenciálható** az *u* pontban, ha létezik olyan *A*: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)-f(u)-\mathcal{A}(x-u)}{||x-u||_{\mathbf{R}^n}}=0_{\mathbf{R}^m}$$

Ekkor *A* egyértelm? és az *f* leképezés *u*-bent beli **differenciál**jának nevezzük és d*f*(*u*)-val vagy D*f*(u)-val jelöljük. Ezt a fogalmat néha *teljes differenciál*nak, *totális differenciál*nak vagy *Fréchet-deriválti*nak is mondjuk.

Megjegyzés. A fenti határérték 0 volta egyenérték? a következ? kijelentéssel. Létezik *A:* $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés és : Dom(*f*) $\to \mathbf{R}^m$ függvény, melyre:

folytonos u-ban és (u)=0, továbbá

minden *x* Dom(*f*)-re:

$$f(x)=f(u)+\mathcal{A}(x-u)+\varepsilon(x)||x-u||$$

Megjegyzés. Azt, hogy *A* egyértelm?, a következ?kkel bizonyíthatjuk. Legyen *A* és *B* is a mondott tulajdonságú, azaz létezzenek és az *u*-ban elt?n? és ott folytonos Dom(*f*)-en értelmezett függvények, melyekre teljesül, hogy minden *x* Dom(*f*)-re

$$f(x)=f(u)+\mathcal{A}(x-u)+\varepsilon(x)||x-u||$$
$$f(x)=f(u)+\mathcal{B}(x-u)+\eta(x)||x-u||$$

ezeket kivonva egymásból és használva **minden** *x*-re:

$$(\mathcal{A}-\mathcal{B})(x-u)+(\varepsilon(x)-\eta(x))||x-u||=0$$

így minden x = u + ty értékre is az azonosan nullát kapjuk, ha t pozitív szám, y pedig rögzített nemnulla vektor, azaz minden t-re

$$(\mathcal{A}-\mathcal{B})ty+(\varepsilon(u+ty)-\eta(u+ty))||ty||=0$$

az azonosan 0 függény határértéke t$\longrightarrow$ 0 esetén szintén nulla:

$$0=\lim_{t\to 0}\frac{(\mathcal{A}-\mathcal{B})(ty)+(\varepsilon(u+ty)-\eta(u+ty))||ty||}{t}=(\mathcal{A}-\mathcal{B})y$$

hiszen t-t kiemelhetünk és egyszer?síthetünk és t$\longrightarrow$ 0 esetén és nullává válik. Ez viszont pont azt jelenti, hogy a két lineéris operátor azonosan egyenl?.

Jacobi-mátrix

A d$f(u)$ lineáris leképezés (e_1,e_2,...,e_n) szetenderd bázisbeli mátrixa legyen: [d$f(u)$] = **A**. Vizsgáljuk mibe viszi a bázisokat d$f(u)$ leképezés!

Írjuk fel a definíciót, de az e_1 egységvektor mentén tartsunk u-hoz: $x = u + te_1$. Ekkor

$$x-u=te_1$$

ami azért hasznos, mert a

$$\mathcal{A}(x-u)=\mathcal{A}(te_1)$$

alakból kiemelhető t:

$$0=\lim_{t\to 0}\frac{f(u+te_1)-f(u)-\mathcal{A}(te_1)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(u+te_1)-f(u)-t.\mathcal{A}(e_1)}{t}=$$

$$=-\mathcal{A}(e_1)+\lim_{t\to 0}\frac{f(u+te_1)-f(u)}{t}$$

azaz

$$\mathcal{A}(e_1)=\lim_{t\to 0}\frac{f(u+te_1)-f(u)}{t}=\partial_1 f(u)$$

vagyis f koordinátafüggvényeinek az els? változó szerinti parciális deriváltja az u pontban. A többi oszlopvektor ugyanígy:

$$[\mathrm{d}f(u)]=\mathbf{J}^f(u)=\begin{bmatrix}\partial_1 f_1(u) & \partial_2 f_1(u) & \dots & \partial_n f_1(u)\\ \partial_1 f_2(u) & \partial_2 f_2(u) & \dots & \partial_n f_2(u)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_1 f_m(u) & \partial_2 f_m(u) & \dots & \partial_n f_m(u)\end{bmatrix}$$

amelyet **Jacobi-mátrix**nak nevezünk.

Következmény. Tehát. ha f totálisan differenciálható, akkor parciálisan is differenciálható és a differenciál sztenderd bázisbeli mátrixa a Jacobi-mátrix.

Azaz:

teljes differenciálhatóság $\Longrightarrow$ **parciális** differenciálhatóság

de ez fordítva már nem igaz:

parciális differenciálhatóság $\not\Longrightarrow$ **teljes** differenciálhatóság

Erre vonatkozik a két alábbi példa.

4. gyakorlat 6. gyakorlat