Ez az szócikk a Matematika A2a 2008 alszócikke.

Tartalomjegyzék

Példa téglán történ? inegrálásra

Ha f(x,y) = x és a [0,2]×[0,2]-n integráljuk, akkor el?ször az y szerinti integrált elvégezve (eközben x állandónak min?sül), majd a határozott integrált kiszámolva az x szerintit integrálva:

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{2} x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{x=0}^{2} [xy]_{y=0}^{2}\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{2} 2x\,\mathrm{d}x = [x^2]_{x=0}^{2} = 4$$

Hangsúlyozzuk, hogy itt két esetben a Newton-Leibniz-formulát használtuk a határozott integrál kiszámítására:

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ahol F az f primitív függvénye (vagy határozatlan integrálja). Az esl? esetben az y változó szerepeltetése az integrál kiszámítását követ?en indokolatlanná vált, de az x megmaradt, amit tovább kellet integrálni az x változóra vonatkozóan. Fordított esetben szintén 4-et kapunk:

$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{2} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{2}\left(\int_{x=0}^{2} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_{y=0}^{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{2}\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{2} 2\,\mathrm{d}y = [2y]_{y=0}^{2} = 4$$

Tartományi széls?érték, téglán integrálás

1.

$$f(x,y) = xy$$
T = [0,1]×[0,1]

2.

$$f(x,y) = x\sin(x^2)y$$
T = [0,1]×[0,1]

Mo.

$f'_x(x,y) = y(\sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)) = 0$
$f'_y(x,y) = x\sin(x^2) = 0$

3.

$$f(x,y) = x^7 + sin(y)\cos^3(y)$$
T = [0,1]×[0,1]

4.

T = [1,e] × [1,2]
$$f(x,y) = \frac{\ln^9 x}{xy}$$

5.

T = [-1,1] × [0, /4]
$$f(x,y) = \sin(x^3)\frac{1}{\cos^2 y}$$

6.

T = [-1,1] × [0,1]
$$f(x,y) = \sin(x^3)\frac{\sin^{2009}(\mathrm{sh}(y))}{\ln y}$$

7.

T = [a,b] × [c,d]
$f(x,y) = g(x)h(y)$

téglalapon szeparálható integrandus integrálja szorzattá esik szét:

$$\int\limits_{x=0}^{b}\int\limits_{y=c}^{d} g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{x=a}^{b} g(x)\left(\int\limits_{y=c}^{d} h(y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \left(\int\limits_{x=a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int\limits_{y=c}^{d} h(y)\,\mathrm{d}y\right.$$

8.

$$T = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le x^2\}$$
$$f(x,y) = x^3\cos(xy)$$

$$\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{x^2} x^3\cos(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{x=0}^{1}\left(\int\limits_{y=0}^{x^2} x^3\cos(xy)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = *$$

$$F(x) = \int\limits_{y=0}^{x^2} x^3\cos(xy)\,\mathrm{d}y = \left[x^3\frac{\sin(xy)}{x}\right]_{y=0}^{y=x^2} =$$
$$= x^2\sin(x^3)$$

$$* = \int\limits_{x=0}^{1} x^2\sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_{x=0}^{1} 3x^2\sin(x^3)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{3}[-\cos(x^3)]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{\cos(1)}{3}$$

Többváltozós függvény Riemann-integrálja

A T= $J_1 \times J_2$ korlátos és zárt téglalap egy **Riemann-felosztás**án nem mást értünk mint egy olyan kiválasztófüggvényt, mely a T-t unióként el?állító, egymásba nem nyúló tengelyekkel márhuzamos oldalú téglalapokból álló halmaz minden egyes eleméhez egy az adott elemben lév? elemet rendel, azaz egy olyan függvényt, melyre:

1. Dom( ) minden *I* eleme tengelyekkel párhuzamos oldalú zárt téglalap, melyek egymásba nem nyúlnak, uniójuk T
2. minden *I* Dom( ) esetén $\eta(I) \in I$.

A T összes **Riemann-felosztásai halmazát** RF(T) jelöli. Azon Riemann-felbontások halmazát, amelyekben az összes elem területe (oldalhosszainak szorzata) kisebb egy > 0 pozitív számnál, RF (T) jelöli, ezt a halmazt a T összes **-nál finomabb Riemann-felosztásának** nevezük.

Egy *f*, az T-n értelmezett és **R**-be képez? függvény egy felosztáshoz tartozó **Riemann-közelít? összegén** a

$$\sigma_f(\eta) = \sum_{I\in\mathrm{Dom}(\eta)} f(\eta(I))\cdot|I|$$

Ekkor már definiálhatjuk az Riemann-integrálhatóságot:

Definíció. Legyen *f*:T $\longrightarrow$ **R**egy zárt és korlátos téglán értelmezett függvény. Azt mondjuk, hogy *f* **Riemann-integrálható** és integrálja az A valós szám, ha

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \eta \in \mathrm{RF}_\delta(T))(|\sigma_f(\eta) - A| < \varepsilon)$$

Belátható, hogy ha *f* integrálható, akkor A egyértelm? és ekkor ennek a számnak a jelölésére az

$\int_T f$, vagy az $\int_{T_{x,y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

szimbólum szolgál.

A T téglalapon Riemann-integrálható függvények halmazát R(T) jelöli.

Az integrál lényegében a függvény grafikonja alatti térfogat. Integrálható függvény esetén létezik ez a térfogat, azaz a Riemann-felosztást egyre finomabbra véve, a Riemann-közelít? összeg minden el?re megadott legnagyobb eltérésnél közelebb kerül A-hoz.

Világos, hogy ha egy függvény integrálható, akkor minden résztégláján is integrálható (hisz ekkor azokat a felosztásokat kell venni, amik a részintervallumon belül is felosztások, és persze ezek szerint is képezve a határátmenetet, létez? határértéket kapunk).

Egy kompakt K halmazon értelmezett f függvény integrálja nem más, mint tetsz?leges a K-t tartalmazó T tégla esetén az

$$\hat{f} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \in T \setminus K \\ f(x), & \text{ha} \quad x \in K \end{cases}$$

függvény integrálja T-n, ha ez létezik.

A Riemann-inregrálhatóság szükséges és elégséges feltétele

Bár a Riemann-integrálhatóság általában könnyen kezelhet? fogalom, a következ? tétel bizonyításához azonban a klasszikus analízis szinte összes eszközét be kell vetni. Nem csoda, hogy csak 1905-ben fogalmazhatta meg Lebesgue, egy tágabb perspektívából szemlélve a Riemann-integrált.

Tétel. Legyen *f*: T $\longrightarrow$ **R** korlátos és zárt téglán értelmezett függvény. *f* pontosan akkor Riemann-integrálható, ha korlátos, és szakadási helyeinek halmaza Lebesgue-nullmérték? halmaz, azaz

$$f \in \mathrm{R}(T) \ \Leftrightarrow \ (f \in \mathrm{B}(T) \ \wedge \ \mathrm{m}(\mathrm{discon}(f)) = 0)$$

Itt Lebesgue-nullmérték?nek nevezünk egy *H* **R**^{N} halmazt, ha minden > 0-hoz létezik olyan (I_n) téglasorozat, hogy ennek össztérfogata < és lefedi *H*-t.

Biztos nem nullmérték? például egy nemelfajuló intervallum, mert annak a mértéke az intervallum nemnulla hossza. De véges halmaz nullmérték?, mert lefedhet?, egy határértékben elt?n? intervallumsorozat-rendszerrel. Belátható, hogy megszámlálható pont nullmérték? halmazt alkot. Konkrétan, könyen belátható, hogy az 1/n pontjai nullmérték? halmazt alkotnak.

Világos, hogy a Dirichlet-függvényes példa azért jó ellenpélda, mert ez a függvény [0,1]-en mindenhol szakad, azaz discon(Dir)=[0,1], melynek a mértéke 1.

Példa. Felvet?dik a kérdés: van-e konitinuum sok helyen szakadó, Riemann-integrálható függvény. A válasz igenl?. (Lásd: az **ördög lépcs?je** függvényt)

A Riemann-integrálhatóság néhány kritériuma

Részletezünk néhány hasznos esetet a fenti tételb?l.

1. $f \in \mathrm{R}(T) \;\Rightarrow\; f \in \mathrm{B}(T)$

   csak korlátos függvények R-intgrálhatóak
2. $f \in \mathrm{R}(T) \;\Leftarrow\; f \in \mathrm{C}(T)$

   (Cauchy) világos: ha folytonos, akkor nincs szakadási pontja, és korlátos a Weierstrass-tétel miatt

Kétváltozós függvény integráljának kiszámítása

Ha *f*:[a,b]×[c,d]$\longrightarrow$ **R** intergálható, akkor

1. minden *x*-re a
$$F(x)=\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\qquad x\in[a,b]$$
függvény is integrálható és
2. $$\int\limits_{x=a}^{b}\left(\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f$$

Ugyanis, ha ekkor *f* korlátos, és L.-0-mérték? a szakadásainak halmaza. Emiatt az f(x,.) függvények is ilyenek, melyek integrálja folytonos a [c,d] intervallumon, amib?l korlátos is, tehát integrálható.

Másrészt,

Paraméteres integrál integrálhatóságának kritériuma

Legyen f:[a,b]×[c,d]$\longrightarrow$ **R** folytonos. Ekkor az

$$F(y)=\int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x,\qquad y\in[c,d]$$

létezik mert az integrandusa folytonos. Mi több, maga is folytonos.

Ugyanis,

$$F(y)-F(y_0)=\int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)-f(x,y_0)\,\mathrm{d}x$$

Legyen   > 0 tetsz?leges. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért létezik   >0, hogy ha |(x,y)-(x,y_0)| <   , akkor

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Ekkor viszont

$$|F(y)-F(y_0)|\leq\int\limits_{x=a}^{b}|f(x,y)-f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x\leq\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon$$

Tehát F(y) folytonos (egyenletesen) és így integrélható egyváltozós függvény, azaz létezik:

$$A=\int\limits_{y=c}^{d}\left(\int\limits_{x=a}^{b}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

Ez alapot ad az integrál kiszámítására: az f(x,y) kétváltozós függvény intergálja tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalap alakú tartományon nem függ az integrálás sorrendjét?l. Ezesetben a "http://wiki.math.bme.humásik változót"http://wiki.math.bme.hu mindig konstansnak vesszük:

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]}f=\int\limits_{x=a}^{b}\left(\int\limits_{y=c}^{d}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_{x=a}^{b}\int\limits_{y=c}^{d}f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int\limits_{y=c}^{d}\left(\int\limits_{x=a}^{b}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Tétel. Ha f:[a,b]×[c,d]⟶ **R** integrálható, minden *y*   [c,d]-re $x\mapsto f(x,y)$ is integrálható és $F:y\mapsto\int\limits_{x=a}^{b}f(x,y)$ is integrálható, akkor $\int f=\int\limits_{c}^{d}F$.

Bizonyítás. Legyen   >0. Legyen *A* olyan, hogy

$$\int\limits_{c}^{d}F=A$$

Ekkor   /2-höz létezik olyan   >0, hogy [c,d]-nek minden   -nál finomabb $_J$ Riemann-felosztására:

$$\left|\sum_J F(\eta_J)|J| - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De ekkor létezik a /2(d-c)-hez és minden J-re olyan '>0, hogy [a,b]-nek minden '-nál finomabb $_I$ Riemann-felosztására:

$$\left|\sum_I f(\xi_I, \eta :_J)|I| - F(\eta_J)\right| < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}$$

Viszont ekkor

$$\left|\sum_I \sum_J f(\xi_I, \eta_J)|J||I| - \sum_J F(\eta_J)|J| + \sum_J F(\eta_J)|J| - A\right| = \left|\sum_J (\sum_I f(\xi_I, \eta_J)|I| - F(\right.$$

Feladatok

8. gyakorlat 10. gyakorlat