

Tartalomjegyzék

- 1 Laurent-sor
 - ♦ 1.1 A Laurent-sor együtthatói
 - ♦ 1.2 F?rész nélküli Laurent-sor
 - ♦ 1.3 A végtelen pont körüli Laurent-sor
- 2 Szinguláris helyek és osztályozásuk, reziduumszámítás
 - ♦ 2.1 Reziduum
 - ♦ 2.2 Megszüntethet? szingularitás
 - ♦ 2.3 Pólusszingularitás
- 3 Gyakorlás

Laurent-sor

A Laurent-sor együtthatói

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

amennyiben a G egy a körgy?r?ben haladó a z_0 -t egyszer körülöl? zárt görbe.

Példa. Fejtsük Laurent-sorba az alábbi függvényt a $-i$ pont körül:

$$f(z) = \frac{\sin(z + i)}{(z + i)^3}$$

1. Megoldás. Tegyük $z+i=w$ -t és helyettesítsünk a $\sin$ már ismert sorába. $w \neq 0$ -ra:

$$f(w) = \frac{1}{w^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1-3} =$$

"http://wiki.math.bme.hu $2n+1-3=2n-2=2k$ "http://wiki.math.bme.hu-val ill $2n=2k+2$ -vel, ill $n=k+1$

$$= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!} w^{2k}$$

2. Megoldás. Az képlettel és a $\sin$ deriváltjaival.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{\frac{\sin(w)}{w^3}}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{\sin(w)}{w^{n+4}} dw =$$

$n+4 < 0$ -ra, azaz $n < -4$ -re az integrandus reguláris, így az integrál 0, sőt $n=-4$ -re és $n=-3$ -re is ez a helyzet. $n > -3$ -re a deriváltakra vonatkozó Cauchy-féle képletekkel kell kiszámítanunk, az n -edik együtthatót abból a képletből számoljuk, mely nevezőben lévő $n+4 = (n+3)+1$ miatt az $n+3$ -edik deriváltat adja. Mivel

$$\sin^{(n+3)}(0) = \frac{(n+3)!}{2\pi i} \oint_G \frac{\sin(w)}{w^{n+4}} dw$$

ezért

$$n \geq -3 \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{2\pi i}{(n+3)!} \sin^{(n+3)}(0) = \frac{\sin^{(n+3)}(0)}{(n+3)!}$$

$2l=n$ -nel

$$c_{2l} = \frac{\sin^{(2l+3)}(0)}{(2l+3)!} = \frac{(-1)^{l+1}}{(2l+3)!}, \quad \text{ha } l \geq -1 \quad \text{és}$$

$$c_{2l} = 0, \quad \text{ha } l < -1$$

Fő rész nélküli Laurent-sor

Ha nincs a Laurent-sornak fő része, akkor $R_-=0$ és az f függvény a z_0 pontban vagy reguláris, vagy megszüntethető szakadása van. Ez utóbbi miatt, hogy ebben az esetben f a z_0 -on kívül azonos egy hatványsor összegfüggvényével, mely azonban Abel tétele miatt folytonos és így határértéke a helyettesítési értékkel egyenlő. Tehát, ha f ilyen, akkor:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n 0^n = c_0$$

hiszen a hatványsoroknál a középpontban a 0^0 hatványt 1-nek értelmezzük.

f kiterjeszthető ezek szerint analitikusan kiterjeszthető és az értéke

$$\overline{f}(z_0) = c_0$$

Világos, hogy ez esetben a c_n együtthatók pontosan az f kiterjesztésének **taylor-sori együtthatói**, hiszen a deriváltakra vonatkozó Cauchy-formulákat a Taylor-sorral összevetve:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

bármilyen a z_0 -t egyszer körülölelő, a körgyűrűben haladó zárt görbére.

Példa. Igazoljuk, hogy az alábbi függvény reguláris a 0 pontban és számítsuk ki a kiterjesztés összes magasabbrendű deriváltját!

$$f(x) = \frac{e^z - z - 1}{z^2}$$

Megoldás. Elvileg ez egy Laurent-sor, hisz számlálóbeli reguláris függvény van elosztva z^2 -tel. De konkrétan elvégezve:

$$f(x) = \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}z^3 + \dots \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3}z + \dots$$

azaz f a 0-t kivéve egy reguláris függvénnyel egyenlő, azaz kiterjeszthető regulárisra és ez a fenti. A deriváltakat a Taylor-sor együtthatói adják a megfelelő faktoriálissal megsorozva. $k=n-2$ -re:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)(k+2)} z^k$$

azaz

$$f^{(k)}(0) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

A végtelen pont körüli Laurent-sor

Legyen az $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény az 0 egy környezetében mindenhol reguláris.

- Regulárisnak nevezzük az $f(z)$ függvényt a 0 -ban, ha az $F(1/z)$ függvény (azaz a 0 (1/id) függvény) reguláris 0 -ban, azaz ott megszüntethető szakadása van.
- Az f 0 -beli Laurent-során a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ sort értjük, ahol $\sum$ az f (1/id) függvény 0 -beli Laurent-sora.
- $\sum f$ része a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ -ban a reguláris lesz és fordítva, azaz
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ konvergenciatartománya $|z| > 1/r$ számok, ahol $0 < |z| < r$ -ra konvergens $\sum$.

Példa. Írjuk fel az

$$f(z) = z^2$$

függvény 0 körüli Laurent-sorát!

Megoldás.

$$F(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta^2}$$

Ez csak f részt tartalmazó $0 < |z| < +\infty$ tartományon konvergens sor, azaz elállítja f (1/id)-t. f ugyanúgy viselkedik 0 -ban, mint f (1/id) a nullában, így f -nek a 0 -ban csak f részt tartalmaz és a sora maga az f . Resziduuma 0 .

Példa. Írjuk fel az

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

függvény körüli Laurent-sorát!

Megoldás.

$$F(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = e^\zeta$$

Ennek sora:

$$e = 1 + \frac{\zeta}{1!} + \frac{\zeta^2}{2!} + \dots$$

és a $0 < |\zeta| < +\infty$ tartományon konvergens és csak reguláris része van. Tehát vissza transzformált sor:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

mindenhol konvergens és szintén csak reguláris része van. Sőt, ekkor azt mondjuk, hogy f az $0 < |z| < +\infty$ -ben reguláris. Reziduuma -1

Példa. Írjuk fel az

$$f(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$$

függvény körüli Laurent-sorát!

Megoldás.

$$F(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{1 - \zeta}$$

Ez a $B(0,1)$ -en konvergens és csak reguláris tagokat tartalmaz. Így a $0 < |z| < +\infty$ körüli sor is csak azt fog tartalmazni és

$$f(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots$$

konvergens lesz a $|z| > 1$ -en. Reziduuma 1.

Szinguláris helyek és osztályozásuk, reziduumszámítás

Az $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett függvény izolált szinguláris helyének nevezzük a $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ pontot, ha f értelmezve van a z_0 egy kipontozott környezetében, de ott a függvény nem reguláris.

Itt a nem regulárist úgy értjük, hogy vagy értelmezve van, de ott nem komplex deriválható, vagy nincs értelmezve.

A definícióval másképp is fogalmazható. Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett függvény esetén a $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ pont olyan, hogy létezik $\delta > 0$, hogy

A végtelen pont körüli Laurent-sor

$$\dot{B}_\delta(z_0) \subseteq D$$

akkor a következők ekvivalensek:

1. z_0 -nek izolált szinguláris pontja
2. z_0 -ban f nincs értelmezve, vagy nem folytonos

ugyanis, ha folytonos az adott pontban, körülötte pedig reguláris, akkor az adott pontban is reguláris (v.ö. Riemann-tétel).

Reziduum

A $\dot{B}_\delta(z_0)$ -n reguláris függvény sorbafejthető z_0 körül. Éppen ezért, minthogy a Laurent-sor c_{-1} együtthatója maga a reziduum, ezért a szinguláris helyek körüli sorfejtésből mindig adódik a reziduum is. Értelmezzük a körüli reziduumot is, az a $-c_{-1}$ együttható.

Megszüntethető szingularitás

A $\dot{B}_\delta(z_0)$ -n reguláris függvény sorbafejthető z_0 körül. A szingularitásait ezért könnyen osztályozhatjuk a Laurent-sora szerint.

Az alábbi tétel azt mondja, hogy ha egy izolált szingularitás megszüntethető szakadás, akkor ott nem csak folytonossá tehető az f , de reguláris is.

Tétel. f -nek pontosan akkor van a z_0 izolált szingularitásban megszüntethető szakadása, ha a Laurent-sora csak reguláris részből áll. Ebben az esetben a függvény reguláris is tehető.

Bizonyítás. A megszüntethető szakadás definíciója miatt tudjuk, f -nek akkor van a z_0 -ban megszüntethető szakadása, ha

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

létezik és véges. Ekkor f egy z_0 körüli környezetben korlátos. Belátjuk, hogy ekkor a Laurent-sora csak reguláris részből áll. Az együtthatóformulából, $k < 0$ egészre és K_r sugarú körre:

$$|c_{-k}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_r} f(z)(z - z_0)^{k-1} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{K_r} |f(z)| |(z - z_0)^{k-1}| dz = \frac{1}{2\pi} K^2 \cdot 2\pi r \rightarrow 0$$

hiszen f korlátjához létezik olyan kis környezet, ahol a nullához tartó második tényező K -nál kisebb (vagy 1, és akkor a képletben és a végeredményben csak K szerepel). Ha pedig r -rel tartunk a 0-hoz, az együttható eltűnik.

Persze ekkor az f függvény egy reguláris függvénnyel egyenlő a z_0 -on kívül, a z_0 -ban pedig f folytonos.

Értelmes tehát a következő definíció:

Definíció. f -nek a z_0 -ban **megszüntethető szingularitása** van, ha a z_0 izolált szingularitása és ott a Laurent-sora csupa reguláris.

Példa. Igazoljuk, hogy az alábbi függvénynek megszüntethető szingularitása van a 0-ban!

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin z}$$

Megoldás.

Tudjuk:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \cdot \frac{z}{\sin z}$$

a nullában az 1-hez tart, így 1) reguláris a 0-n kívül, 2) a 0-ban létezik véges határértéke, így a tétel miatt megszüntethető szingularitása van.

Ílymódon definiálhatjuk az $z=0$ pont regularitását is.

Példa. $z_0 =$

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

Megoldás.

Ez a függvény a végtelenben reguláris, vagy másként megszüntethető szingularitása van. Ugyanis a

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sin(z)$$

függvény a 0-ban folytonos módon eltűnik. Az $z=0$ környezetében a függvényt az

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots$$

amely csak reguláris tagokat tartalmaz és

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{z}} = 0$$

ahogy a tagonként határértékképzéskor is ez jön ki.

Pólusszingularitás

Az f nek pólusszingularitása van a z_0 izolált szinguláris helyen, ha a Laurent-sora f részében legalább egy, de legfeljebb véges sok tag van.

Részletesebben. Az f nek k -ad rendű pólusszingularitása van a z_0 izolált szinguláris helyen ($k > 0$ egész), ha a Laurent-sora f részében a c_{-k} együttható nem nulla, de az $1/z$ k -nál magasabb hatványai már nem szerepelnek

Megszüntethető szingularitás

a f?részben.

Másként.

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$
- z pontosan akkor pólussingularitás, ha $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$ véges, nemnulla, de $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z)$ már nulla.

Plusszingularitások rendjének kiszámítására két fontos lemmát használhatunk.

Állítás. Az $f: D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ függvénynek pontosan akkor van k -ad rendű pólussingularitása a z_0 helyen, ha létezik olyan D -n reguláris g függvény, mely z_0 -ban nem nulla, és minden D -beli $z \neq z_0$ -ra:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

Azaz az ilyen f -ek

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} g(z)$$

alakúak, ahol g reguláris, ezt azért nem bizonyítjuk, mert szinte csak átfogalmazása a definíciónak.

Példa. Világos, hogy az

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^{1821}}$$

függvény pólussingularitásának foka 1821.

$$\text{Res } f = \frac{\cos^{(1820)}(0)}{1820!} = \frac{(-1)^{1820/2+1}}{1820!} = \frac{1}{1820!}$$

Példa. Milyen szingularitása van az

$$f(z) = \frac{1 - \cos z^2}{z^{1821}}$$

függvénynek?

Megoldás.

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z^2)}{z^{1821}} = \frac{1 - \cos(z^2)}{z^4} \cdot \frac{1}{z^{1817}}$$

-ben az első tényező regulárisra tehető 0-ban (hiszen egy 0-körüli reguláris hatánysorral azonos a 0-n kívül), így f -nek 1817-ed rendű pólussingularitása van.

Állítás. Ha az f függvény

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

alakú, ahol g, h reguláris és h -nak a z_0 -ban k multiplicitású zérushelye van, akkor f -nek k -adrendű pólusa van z_0 -ban.

Bizonyítás. Vegyük h z_0 körüli Taylor-sorát. A k multiplicitás azt jelenti, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

sorban

$$\begin{aligned} h(z_0) &= 0 \\ h'(z_0) &= 0 \\ &\vdots \\ h^{(k-1)}(z_0) &= 0 \end{aligned}$$

de

$$h^{(k)}(z_0) \neq 0$$

Tehát

$$h(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Kiemelve $(z - z_0)^k$ -t kapjuk:

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot \frac{g(z)}{\sum_{n=0}^{\infty} h^{(n+k)}(z_0) \frac{1}{(n+k)!} (z - z_0)^{n+k}}$$

ahol az utolsó tényező reguláris.

A reziduumok számításánál nagyon hasznos a következő lemma (mely könnyen általánosítható olyan esetekre, amikor a derivált is eltűnik).

Állítás. Ha az f függvény két reguláris hányadosa

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

és a z_0 -ban izolált szingularitása van úgy, hogy $h(z_0) = 0$, de $h'(z_0) \neq 0$, akkor az z_0 -körüli reziduum:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Ugyanis, vegyük h z_0 körüli Taylor-sorát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Ebből kiemelhetünk $z - z_0$ -t:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n}$$

Használjuk a reziduomtételt és a Cauchy-formulát a residuum kiszámítására:

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z_0} f &= \oint_G f(z) dz = \oint_G \frac{\frac{g(z)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n}}{(z - z_0)} dz = \\ &= 2\pi i \cdot \left. \frac{g(z)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1}} \right|_{z_0} = 2\pi i \cdot \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \end{aligned}$$

alkalmas G görbére.

Magasabbrendű pólusszingularitások reziduumának kiszámítására a következő formula érvényes:

Tétel. Ha f -nek k -adrendű pólusa van z_0 -ban, akkor

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^k f(z))^{(k-1)}$$

Ezt a formulát csak abban az esetben bizonyítjuk, amikor z_0 véges. Ebben az esetben a fenti határérték, maga a helyettesítési érték, hisz reguláris függvény analitikus. Legyen

$$\varphi(z) = (z - z_0)^k f(z)$$

Tudjuk, hogy f Laurent-sorában $-k$ -ig vannak irreguláris tagok:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$

ezért φ ; már egy Taylor sor, és világos, hogy a c_{-1} tagot a Taylor-sora $k-1$ -edik tagjának együtthatójából számíthatjuk ki:

$$\varphi(z) = (z - z_0)^k f(z) = c_{-k} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + c_0(z - z_0)^k + c_1(z - z_0)^{k+1} + \dots$$

azaz

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} (\varphi)^{(k-1)}(z_0)$$

Példa. Milyen szingularitása van az alábbi függvénynek a nevező zérushelyein? Mennyi a reziduuma?

$$\frac{\cos(3z)}{\sin^2(5z)}$$

Megoldás. Másodrendű szing. a zérushelyeken. Ugyanis, a zérushelyek

$$z_l = \frac{\pi}{5} l$$

és ezek másodrendűek, mert:

$$\begin{aligned} (\sin^2(5z))'|_{z_l} &= 10 \sin(5z) \cos(5z)|_{z_l} = 0 \\ (\sin^2(5z))''|_{z_l} &= (10 \sin(5z) \cos(5z))'|_{z_l} = 50 \cos(10z)|_{z_l} = 50 \cos(2\pi l) = 50 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}_0 f = \left(z^2 \frac{\cos(3z)}{\sin^2(5z)} \right)' \Big|_0 =$$

Kicsit bonyi és a határérték számítása problémát okoz.

Érdemes inkább a deriváltra vonatkozó Cauchy-formulával:

1.

$$\operatorname{Res}_0 f = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\frac{1}{25} \cos 3z \frac{25z^2}{\sin^2(5z)}}{z^2} = \frac{2\pi i}{2\pi i} \left(\frac{1}{25} \cos 3z \frac{25z^2}{\sin^2(5z)} \right)' \Big|_{z=0}$$

Ha tudjuk a kardinálszínusz négyzetének, reciprokának deriváltját (0), akkor ezt ki tudjuk számolni:

$$= \frac{1}{25} 3 \sin(3 \cdot 0) \cdot 1 + \frac{1}{25} \cdot 0 = 0$$

2. Másként, egy általános módszert is mutatunk. Másodrendű pólussal van dolgunk:

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + \rho(z)$$

ahol reguláris.

$$\cos(3z) = 1 - \frac{9}{2}z^2 + \frac{3^4}{4!}z^4 + \dots$$

$$\sin^2(5z) = \sin(5z) \times \sin(5z) = \left(5z - \frac{5^3}{3!}z^3 + \dots\right) \times \left(5z - \frac{5^3}{3!}z^3 + \dots\right) = 25z^2 - \frac{5^4}{3}z^4 + \dots$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} \cos(3z) &= f(z) \sin^2(5z) \\ 1 - \frac{9}{2}z^2 + \frac{3^4}{4!}z^4 + \dots &= \left(\frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + \rho(z)\right) \times \left(25z^2 - \frac{5^4}{3}z^4 + \dots\right) = \\ &= 25c_{-2} - \frac{5^4}{3}c_{-2}z^2 + 25c_{-1}z + 25c_0z^2 + \dots = 25c_{-2} + 25c_{-1}z + \left(-\frac{5^4}{3}c_{-2} + 25c_0\right)z^2 + \dots \end{aligned}$$

S mivel az $\cos(3z)$ sorában nincs z^1 fokú tag, ezért az eredmény sorban sem lehet, azaz $25c_{-1} = 0$, azaz a reziduum 0.

Gyakorlás

Példa. Legyen

$$f(z) = \frac{z^3}{(z^2 + 1)(z - 1)}$$

Mennyi a

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz$$

integrál?

1. Megoldás. Kiszámítjuk a $z=1$ -beli reziduumot. A $\frac{1}{z}$ helyettesítést alkalmazva fejtjük sorba a $z=0$ körül:

$$F(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\frac{1}{\zeta^3}}{\left(\frac{1}{\zeta^2} + 1\right)\left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)} = \frac{1}{1 - \zeta + \zeta^2 - \zeta^3}$$

Ezt a 0-ban Taylor-sorba fejthetjük:

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta^2 + \zeta^3)^n = 1 + \zeta - \zeta^2 + \zeta^3 + (\dots)^2 + \dots$$

Visszatranszformálva:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \dots$$

azaz a f valóban reguláris az $z=1$ -ben és reziduum a -1 . Emiatt az integrál $+2\pi i$, ugyanis

$$\operatorname{Res}_1 f + \operatorname{Res}_i f + \operatorname{Res}_{-i} f + \operatorname{Res}_\infty f = 0$$

így

$$\operatorname{Res}_1 f + \operatorname{Res}_i f + \operatorname{Res}_{-i} f = -\operatorname{Res}_\infty f = -(-1)$$

2. *Megoldás.* Egyenként, Cauchy-formulával.

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{z^3}{z^2+1} dz + \oint_{|z-i|=1} \frac{z^3}{(z+i)(z-1)} dz + \oint_{|z+i|=1} \frac{z^3}{(z-i)(z-1)} dz =$$

$$= 2\pi i \frac{z^3}{z^2+1} \Big|_1 + 2\pi i \frac{z^3}{(z+i)(z-1)} \Big|_i + 2\pi i \frac{z^3}{(z-i)(z-1)} \Big|_{-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(i+1) + \frac{1}{4}(1-i) =$$

Példa. Jellemezze a szinguláris helyeket!

$$f(z) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{z^2}}}$$

Megoldás. A 0 és az ∞ szinguláris helyek, továbbá a nevező zérushelyei:

$$z_l^2 = \frac{1}{l2\pi i}$$

Mivel ennek a sorozatnak a 0 torlódási pontja, ezért a 0 nem izolált szinguláris hely. (Tehát a Laurent-sorra alapozott tételeink rá nem használhatók. Ennek ellenére elvileg megvizsgálható, hogy van-e ott határérték vagy sem, de nem a sajátos komplex eszközökkel. Ekkor természetesen azt kapjuk, hogy nincs határértéke (még végtelen sem), de ebből nem tudunk a lényeges izolált szingularitások tulajdonságaira következtetni!)

A véges izolált szinguláris pontokban