

Tartalomjegyzék

- 1 Típuspéldák
 - ♦ 1.1 Egész kitevű hatványsorba fejtés
 - ♦ 1.2 Reziduum-számítás
 - ♦ 1.3 Cauchy-típusú integrálok
 - ♦ 1.4 Integrálás véges sok szinguláris pontot körülhurkoló görbén
 - ♦ 1.5 Vektor és skalármezők deriválása

Típuspéldák

Egész kitevű hatványsorba fejtés

(v.ö.: Egész kitevű hatványsorok, Laurent-sor)

Fő eszköz: mértani sor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad (|z| < 1)$$

Példa. Adjuk meg az alábbi függvény 1 körüli összes Laurent-sorát! Válasszuk ki ezek közül azt, mely a függvényt a 0-ban állítja el!

$$f(z) = \frac{(z-1)^2}{z+i}$$

Megoldás. A függvénynek izolált szinguláris pontja a -i.

Az $a = 1$ körül a következő esetekben fejthetünk sorba, ha $|z - (-i)| < |z - 1|$, ekkor Taylor-sort kapunk, és $|z - (-i)| > |z - 1|$, amikor Laurent-sort. Az első esetben $-(z-1)$ elsőfokú polinomjaként kell a nevezőt felírni, majd a konstans tagot kiemelni, hogy az 1 legyen.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z-1)^2}{z-1+1+i} = \frac{(z-1)^2}{1+i} \cdot \frac{1}{-\frac{z-1}{-1-i} + 1} = \frac{(z-1)^2}{1+i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(-1-i)^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n(1+i)^{n+1}} (z-1)^{n+2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+i)^{k-1}} (z-1)^k \end{aligned}$$

ahol $n+2 = k$ -ra tértünk át. Ez a sor akkor lesz konvergens, ha a számítások során kialakított mértani sor kvociense, azaz $|z-1|/|-1-i| < 1$, ami a $|z-1| < |-1-i| = \sqrt{2}$ tartománynak felel meg.

A másik esetben a $(-1)/(z-1)$ elsőfokú polinomjaként kell a nevezőt felírni, majd a konstans tagot kiemelni, hogy az 1 legyen. Ezt a legegyszerűbben úgy tehetjük, ha a $(z-1)$ elsőfokú polinomjaként írjuk fel a nevezőt, majd $(z-1)$ -et kiemelünk (amivel 1 marad ennek a tagnak a helyén).

Reziduum-számítás

Milyen típusú szingularitása van, mennyi a reziduuma a szingularitási helyen?

1.

$$f(z) = z \operatorname{ch} \left(\frac{3}{z} \right)$$

Megoldás. 0-ban izolált szingularitása van. A sorfejtése:

$$f(z) = z \operatorname{ch} \left(\frac{3}{z} \right) = z \left(1 + \frac{1}{2!} \frac{3^2}{z^2} + \frac{1}{4!} \frac{3^4}{z^4} + \dots \right) = z + \frac{1}{2!} \frac{3^2}{z} + \frac{1}{4!} \frac{3^4}{z^3} + \dots$$

A Laurent-sor f részében sok tag van, így a 0 lényeges izolált szingularitás és leolvassa: $\operatorname{Res}_0 f = 9/2$.

2.

$$f(z) = \frac{\frac{1 - \cos(2z)}{z^2} - 2}{z^3}$$

Megoldás. 0-ban izolált szingularitása van. A cos sorfejtése:

$$\cos(2z) = 1 - \frac{(2z)^2}{2} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \dots$$

A számláló sorfejtése:

$$\frac{1 - \cos(2z)}{z^2} - 2 = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^4 z^2}{4!} + \frac{2^6 z^4}{6!} \dots \right) - 2 = -\frac{2^4 z^2}{4!} + \frac{2^6 z^4}{6!} \dots$$

A tört sorfejtése:

$$f(z) = -\frac{2^4}{4! z} + \frac{2^6 z}{6!} \dots$$

Tehát a 0-ban pólussingularitás van, és pedig 1 elem? a f rész, ezért elsőfokú a reziduum: $-2/3$

Megjegyezzük, hogy f áll $g(z)/z$ alakban, ahol $g(z)$ reguláris és $g(0)$ nem nulla, mert:

$$f(z) = \frac{\frac{1 - \cos(2z)}{z^2} - 2}{z}$$

számlálóját regulárisra tehet? a $g(0) = -2/3$ definícióval.

3. Csak a 0-ban!

$$f(z) = \frac{z}{\operatorname{sh}(z^2)}$$

Megoldás. Írjuk fel nemnulla reg / ? alakban:

$$f(z) = \frac{1}{\frac{\operatorname{sh}(z^2)}{z}}$$

Azt kell megvizsgálni, hogy a nevezőnek a 0 hányszoros multiplicitású gyöke:

$$\frac{\operatorname{sh}(z^2)}{z} = z + \frac{1}{3!}z^5 + \frac{z^9}{5!} - \dots$$

Tehát egyszeres, azaz f a következő alakú:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3!}z^4 + \frac{z^8}{5!} - \dots}$$

Vagyis f -nek a 0-ban elsőfokú pólusszingularitása van. A residuumot számolhatjuk a képlettel (elsőfokú pólus reziduuma):

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{g(0)}{h'(0)} = 1$$

mivel

$$h(x) = z + \frac{1}{3!}z^5 + \frac{z^9}{5!} - \dots$$

Vagy számolhatjuk "http://wiki.math.bme.hu/gyeskedéssel" http://wiki.math.bme.hu, ami furcsamód mindig célravezető, ha a nevező elemi függvény:

$$\begin{aligned} c_{-1} \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \dots &= f(z) = \frac{1}{z + \frac{1}{3!}z^5 + \frac{z^9}{5!} - \dots} \\ 1 &= (c_{-1} \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \dots) \times (z + \frac{1}{3!}z^5 + \frac{z^9}{5!} - \dots) = \\ &= c_{-1} + c_0 z + c_1 z^2 + c_2 z^3 + (c_3 + c_{-1} \frac{1}{3!})z^4 + \dots \end{aligned}$$

azaz $\operatorname{Res} = 1$.

4.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^6}$$

Megoldás. 0 5-ödfokú pólus. A képlettel a Res:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4!} \left(z^5 \frac{\sin z}{z^6} \right)^{(4)} = ?$$

Hiszen a deriválás alatti függvény egy a 0-ban regulárisra áttehető függvény, melynek ílymódon a 4. deriváltja tekinthető a derivált határértékének.

Ügyeskedéssel:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z} - \dots$$

Res = 1/(5!)

Cauchy-típusú integrálok

Eszköz:

Ha f reguláris, akkor minden az a -t a belsejében tartalmazó G egyszeres zárt görbére:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z-a)^{(n+1)}} dz$$

1. Számoljuk ki minden $c \in \mathbb{Z}$ -re az

$$I_c = \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}(2x)}{z^c} dz$$

integrált! *Megoldás.*

$$I_c = 0, \quad \text{ha} \quad c \leq 0$$

mert ekkor az integrandus reguláris függvény, így a Cauchy-féle integráltétel miatt integrálja 0:

$$I_c = \frac{2\pi i f^{(c-1)}(0)}{(c-1)!}, \quad \text{ha} \quad c > 0$$

ahol $f(x) = \operatorname{sh}(2x)$, a C-formulák miatt.

$$\operatorname{sh}(2x)^{(c-1)} \Big|_{z=0} = \begin{cases} 0, & \text{ha } c-1 \text{ páros} \\ 2^{c-1}, & \text{ha } c-1 \text{ páratlan} \end{cases}$$

Integrálás véges sok szinguláris pontot körülhurkoló görbén

Eszköz: A szinguláris helyek körül külön-külön kis körökön integrálunk, melyekre az integrált a reziduúmtétellel, vagy Cauchy-formulákkal számoljuk.

1.

Legyen

$$f(z) = \frac{z^3}{(z^2 + 1)(z - 1)}$$

Mennyi a

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz$$

integrál?

1. Megoldás. Kiszámítjuk a ∞ -beli reziduumot. A $\zeta = 1/z$ helyettesítést alkalmazva fejtjük sorba a $\zeta = 0$ körül:

$$F(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\frac{1}{\zeta^3}}{\left(\frac{1}{\zeta^2} + 1\right)\left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)} = \frac{1}{1 - \zeta + \zeta^2 - \zeta^3}$$

Ezt a 0-ban Taylor-sorba fejthetjük:

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta^2 + \zeta^3)^n = 1 + \zeta - \zeta^2 + \zeta^3 + (\dots)^2 + \dots$$

Visszatranszformálva:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \dots$$

azaz a f valóban reguláris az ∞ -ben és reziduuma -1. Emiatt az integrál +2 πi , ugyanis

$$\text{Res}_1 f + \text{Res}_i f + \text{Res}_{-i} f + \text{Res}_{\infty} f = 0$$

így

$$\text{Res}_1 f + \text{Res}_i f + \text{Res}_{-i} f = -\text{Res}_{\infty} f = -(-1)$$

2. Megoldás. Egyenként, Cauchy-formulával.

$$\begin{aligned} & \oint_{|z-1|=1} \frac{z^3}{z^2+1} dz + \oint_{|z-i|=1} \frac{z^3}{(z+i)(z-1)} dz + \oint_{|z+i|=1} \frac{z^3}{(z-i)(z-1)} dz = \\ &= 2\pi i \frac{z^3}{z^2+1} \Big|_1 + 2\pi i \frac{z^3}{(z+i)(z-1)} \Big|_i + 2\pi i \frac{z^3}{(z-i)(z-1)} \Big|_{-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(i+1) + \frac{1}{4}(1-i) = \end{aligned}$$

2. Keressünk potenciált a

$$v = (2xy^3, 3x^2y^2, z^2)$$

térbeli vektormezőhöz!

3. Keressünk potenciált a

$$v = (x^3 + y^3, 3xy^2)$$

síkbeli vektormezőhöz!

Vektor és skalármezők deriválása

$$\operatorname{grad} (r \cdot |r|^4) = ?$$

$$\operatorname{rot} (\operatorname{div} (r|r|)r) = ? \quad r \in \mathbf{R}^2$$

$$u = ? \quad \text{ha} \quad \operatorname{grad} u = r|r|^2 \quad r \in \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$$