

Tartalomjegyzék

- 1 Gyakorlatok kezdeti érték feladataira
 - ♦ 1.1 Függvényegyenletek
- 2 Homogén fokszámú egyenletek
- 3 Egzakt differenciálegyenlet
 - ♦ 3.1 Definíció
- 4 Egzisztencia- és unicitástétel
- 5 Az egzaktság jellemzése
- 6 Példák

Gyakorlatok kezdeti érték feladataira

1. Oldjuk meg az

$$y' = x^2 \frac{\cos^4 y}{\sin y}$$

egyenletet az

$$\begin{aligned} \text{a) } y(0) &= -\frac{\pi}{2} \\ \text{b) } y(0) &= \frac{\pi}{4} \\ \text{c) } y(0) &= \frac{\pi}{4} + 2\pi \end{aligned}$$

kezdeti feltételek mellett!

Mo. a) Ehhez egy konstans megoldás tartozik és nincs másik a $(0, -\pi/2)$ -n áthaladó, mert az y szerinti parciális derivált korlátos.

b) Az általános megoldásból keressük a kezdeti feltételt kielégítő megoldást:

$$\begin{aligned} \frac{\sin y}{\cos^4 y} y' &= x^2 \\ -\cos^{-4} y (-\sin y) y' &= x^2 \\ \frac{1}{3} \cos^{-3} y &= \frac{1}{3} x^3 + C \end{aligned}$$

Az implicit egyenlet:

$$\cos^{-3} y = x^3 + 3C$$

Ha $x=0$ és $y = \pi/4$, akkor

$$3C = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}$$

és

$$y(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + \frac{24}{(\sqrt{2})^3}}}$$

c) ugyanez + 2

HF. Oldjuk meg az $y' = \sin(x) \ln(y)$ egyenletet az

- a) $y(0)=1$,
- b) $y(0)=e$

kezdeti feltételek mellett!

Függvényegyenletek

2. feladat. Van-e nemdifferenciálható, de folytonos megoldása az $y^2 = x^2$ függvényegyenletnek? *Mo.* Igen: $y(x)=|x|$ nemdifferenciálható, de folytonos megoldása.

3. Feladat. Hány megoldása van az $\ln(x)=e^x$ **R**-en? Hány diffható ebből? *Mo.* Végtelen sok megoldása van, pl.: minden n természetes számhoz található $\ln(x)=e^x$ **R**-en, melyek egymáshoz páronként különböznek: $f(x)=e^x$, ha x nem az n természetes szám és $-e^x$, ha x az n természetes szám. Ebből kettő diffható akad: e^x , $-e^x$, ami a Bolzano-tételből következik. Ha ugyanis lenne nem csak poz. és nem csak neg. $\ln(x)=e^x$ **R**-en, akkor a 0-t is felvenné, ami lehetetlen, mert az $\exp$ függvénynek nincs nulla értéke.

Homogén fokszámú egyenletek

Az $F(x,y)$ n -homogén függvény, ha minden λ esetén

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x,y).$$

Az $y'=F(x,y)$ egyenlet homogén, ha $F(x,y)$ 0-homogén.

Homogén egyenleteknél az $y=ux$ helyettesítés vezet célra. Akkor

$$y'=u'x+u$$

Feladat. $(2x+y)dx + (y+x)dy = 0$ Homogén, mert

$$y' = -\frac{2x+y}{x+y}$$

jobb oldala 0-homogén:

$$-\frac{2x+y}{x+y} = -\frac{2\lambda x + \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = -\frac{2x+y}{x+y}$$

$$u'x + u = -\frac{2+u}{1+u}$$

$$u'x = -\frac{2+2u+u^2}{1+u}$$

$$\frac{1+u}{2+2u+u^2}u' = -\frac{1}{x}$$

Egzakt differenciálegyenlet

Definíció

Legyen $U \subset \mathbf{R}^2$ nyílt halmaz és $P, Q: U \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos függvények, Q sehol sem nulla. Azt mondjuk, hogy az

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (\text{EX})$$

differenciálegyenlet *egzakt*, ha létezik olyan $F: U \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q \quad (\text{C})$$

Számpélda. Az

$$y' = -\frac{x}{y}$$

egyenlet egzakt, mert az $F(x, y) = x^2 + y^2$ függvény olyan, hogy $\partial_x F(x, y) = 2x$, $\partial_y F(x, y) = 2y$, mármint az

$$y' = -\frac{2x}{2y}$$

alakjában egzakt.

Elméleti példa. Minden

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (f \in C(I), g \in C(J), 0 \notin \text{Ran}(g))$$

alakú szeparábilis differenciálegyenlet egzakt, hiszen ha g integrálfüggvénye G , akkor

$$g(y)y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad G(y) = F(x) + C$$

Alkalmas tehát az alábbi függvény:

$$\Phi(x, y) := G(y) - F(x) = C \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = g$$

Jelen esetben a G függvény deriváltja ($G'=g$) sehol sem nulla folytonos függvény, ezért szigorúan monoton. Emiatt kifejezhető y és pedig:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Megjegyzés. A megoldásokat implicit módon adja meg az

$$\Phi(x, y) = C$$

egyenlet. Mivel

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$$

ezért az implicitfüggvény-tétel miatt y -t <http://wiki.math.bme.hu> lehet fejezni <http://wiki.math.bme.hu>. Érdemes felelevenítenünk magát az implicitfüggvény-tételt:

Implicitfüggvény-tétel -- Ha a $\Phi : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény az $(x_0, y_0) \in \text{int}(I \times J)$ pontban teljesíti a $\partial \Phi / \partial y \neq 0$ feltételt, akkor a (x_0, y_0) pont egy környezetében egyértelműen létezik az $(x, y) = (x_0, y_0)$ egyenletnek az (x_0, y_0) ponton áthaladó implicit függvénye, azaz az x_0 egy $K \subset I$ környezetében értelmezett, J -beli értékű y deriválható függvény, melyre minden $x \in K$ esetén:

$$\Phi(x, y(x)) = \Phi(x_0, y_0), \quad y(x_0) = y_0$$

és ennek deriváltja minden $x \in K$ -ban:

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} \bigg|_{(x, y(x))}$$

Egzisztencia- és unicitástétel

Tétel. Legyenek P és Q az $U \subset \mathbf{R}^2$ nyílt halmazon értelmezett folytonos valós függvények, Q sehol se nulla, $\text{grad } F = (P, Q)$ valamely $F : U \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvénnel és $(x_0, y_0) \in U$. Ekkor

1) az

$$(ex) \ y' = -P/Q$$

egyenletnek egyértelműen létezik az $y_0 = y(x_0)$ kezdeti feltételt kielégítő y lokális megoldása és

2) az

$$(impl) \ F(x, y) = F(x_0, y_0)$$

egyenlet (x_0, y_0) -on áthaladó egyetlen lokális implicit függvénye az (ex) egyenlet $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő egyetlen lokális megoldása.

Biz. 1) Egzisztencia. Belátjuk, hogy (impl) egyetlen (x_0, y_0) -on áthaladó implicit függvénye megoldása az (ex) egyenletnek.

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = Q(x_0, y_0) \neq 0$$

így az implicitfüggvény-tétel szerint, egyértelműen létezik F -nek $y=y(x)$ implicit függvénye az adott pont egy környezetében és ennek deriváltja az értelmezési tartományának minden pontjában:

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = - \frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

tehát y az (ex) differenciálegyenletnek is megoldása, és ez kielégíti a kezdeti feltételt.

Unicitás. Tegyük fel, hogy létezik megoldása a kezdeti érték feladatnak. Legyen egy tetszőleges megoldása y , azaz

$$y'(x) = - \frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

Ez az egyenlet a $\text{grad } F = (P, Q)$ miatt eláll

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

alakban. Most belátjuk, hogy y (impl)-nek implicit megoldása. Az összetett függvény differenciálási szabálya miatt $(d(F \circ G)(x, y) = dF(G(x, y)) \circ dG(x, y))$ az előző egyenlet a következő formában is írható:

$$(F(x, y(x)))' = [\text{grad } F|_{(x, y(x))}] \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y'(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}|_{(x, y(x))} + y' \frac{\partial F}{\partial y}|_{(x, y(x))} \equiv 0$$

x értékei egy intervallumból kerülnek ki, ezért az *integrálszámítás alaptétele* szerint az $x \mapsto F(x, y(x))$ egy konstans függvény. De a feltétel szerint $y(x_0) = y_0$ teljesül, ezért $x \mapsto y(x)$ egy (x_0, y_0) -on áthaladó implicit függvénye az $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ egyenletnek. Ez az utóbbi azonban egyértelműen van meghatározva, ezért a kezdeti érték feladat minden megoldása egybeesik ezzel az implicit függvénnyel, azaz a megoldás egyértelmű.

2) Az implicitfüggvény tételében adott egyetlen implicit függvény az 1) egzisztencia része miatt megoldása (ex) -nek és 1) unicitás része miatt ez az egyetlen megoldása (ex) -nek.

Az egzaktság jellemzése

Megjegyzés. Az egzakt differenciálegyenletet még

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \text{ ill. } P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

alakban is szokás írni.

Ez utóbbi egyenletről azt is mondják, hogy akkor egzakt, ha a $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ kifejezés

"http://wiki.math.bme.hu/teljes_differenciál" http://wiki.math.bme.hu, amin azt értik, hogy létezik olyan $F(x,y)$ függvény, melynek teljes differenciálja:

$$dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Ezt a mai jelölésekkel a következőképpen írjuk. Egy F kétváltozós függvény teljes differenciálja egy lineáris leképezés, mely a sztenderd $\{(1,0), (0,1)\}$ bázisban felírt koordinátáival nem más, mint a parciális deriváltjainak sormátrixa:

$$[dF(x, y)] = \text{grad } F(x, y) = \left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right]$$

Emiatt a (C) feltétel a következő alakban is írható:

$$[dF] = [P, Q] \text{ ill. } \text{grad } F = [P, Q]$$

Tehát az egzakt egyenletben a (P, Q) vektormező (vektorértékű függvény) **potenciális**. Innen hasznos jellemzést kapunk az egzaktságra a vektoranalízisbeli ismereteinkből.

Tétel. Legyen U egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $P, Q: U \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvények (Q sehol sem nulla). A $Pdx + Qdy = 0$ egyenlet pontosan akkor egzakt, ha

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Az F függvényt, az $Pdx + Qdy = 0$ egyenlet integráljának nevezzük.

Ezt a tételt jól ismerjük és a bizonyítását a vektoranalízisben vettük.

Megjegyzés. 1) A feltétel nem más, mint az, hogy a (P, Q) síkbeli vektormező rotációja azonosan nulla. Ugyanis a rotáció a síkbeli (P, Q) vektormező esetén:

$$\text{rot}(P, Q) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

2) Bár a szeparábilis egyenlet egzakt, a fenti feltétel az egzaktság ellenőrzésére sokkal szigorúbb mint a szeparábilis egyenlet megoldhatóságának feltétele.

Példák

Oldjuk meg az

$$(ye^{xy} + \cos x) dx + (xe^{xy} + \text{ch } y) dy = 0$$

differenciálegyenletet!

Mo.

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = e^{xy} + xy e^{xy}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = e^{xy} + xy e^{xy}$$

Tehát egzakt. Az egyenlet első integrálját megkapjuk, ha megoldjuk az

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y e^{xy} + \cos x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x e^{xy} + \operatorname{ch} y$$

parciális differenciálegyenlet-rendszert.

Az első egyenletről:

$$F(x, y) = e^{xy} + \sin x + C(y)$$

A második egyenlet miatt:

$$x e^{xy} + C'(y) = x e^{xy} + \operatorname{ch} y$$

azaz

$$C'(y) = \operatorname{ch} y$$

Innen a $C(y)$ -ra egy partikuláris megoldás:

$$C(y) = \operatorname{sh} y$$

Azaz

$$F(x, y) = e^{xy} + \sin x + \operatorname{sh} y$$

Ez valóban teljesíti a $\operatorname{grad} F = [P, Q]$ feltételt, így az első integrál:

$$e^{xy} + \sin x + \operatorname{sh} y = C$$

Feladat. Oldjuk meg az $y' = (y \cos(xy) + 1) / -x \cos(xy)$ az $y(1) = 0$ kezdeti feltétel mellett! *Mo.* $(y \cos(xy) + 1) dx + x \cos(xy) dy = 0$ Integráljuk mindkét függvényt: $F(x, y) = x + y \sin(xy) / y + C_1(y) = x \sin(xy) / x + C_2(x)$. Innen $F(x, y) = \sin(xy) + x$. Ez valóban megoldás és az implicit általános megoldás $\sin(xy) + x = C$. A kezdeti feltételt kielégíti? megoldás: $\sin(xy) + x = 1$, ahonnan egy lokális megoldás az $x \in (0, 2)$ -beli: $\sin(xy) = 1 - x$, $xy = \arcsin(1 - x)$, $y(x) = \arcsin(1 - x) / x$

1. gyakorlat

3. gyakorlat