

Tartalomjegyzék

- 1 Integráló tényez?
- 2 Speciális esetek
- 3 Elméleti példák
- 4 Gyakorlás
- 5 Függvényegyütthatós elsőrend?
lineáris d.e.

Integráló tényez?

Általában egy $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ alakú differenciálegyenlet esetén nem teljesül a $\text{rot}(P,Q)=0$ feltétel. Esetenként azonban található olyan μ kétváltozós pozitív értékű függvény, amellyel:

$$\mu(x, y)P(x, y) + y'\mu(x, y)Q(x, y) = 0$$

már egzakt egyenlet. Vizsgáljuk meg miből nyerhetjük az ilyen μ un. **integráló szorzót!** A $\text{rot}(\mu P, \mu Q)=0$ feltétel a következő:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu P}{\partial y} &= \frac{\partial \mu Q}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y}\end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$$

és ugyanígy

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial y}$$

ezért

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \ln \mu}{\partial y}$$

Ezt a parciális differenciálegyenletet kell megoldanunk ahhoz, hogy legyen integráló tényezőnk.

Speciális esetek

Megállapíthatjuk, hogy néha érdemes a μ -re felírt egyenletnek csak olyan megoldásait keresni, amelyek csak

az egyik változótól függenek. Ez a következ? esetekben áll el?.

I. Keressük a megoldást a $\mu=\mu(x)$ feltevéssel! Ekkor $\ln(\mu)=\ln(\mu)(x)$ és $\partial_y \ln(\mu)=0$, azaz

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$$

és

$$R(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$$

csak x -től függ és innen az integráló szorzó:

$$\mu(x) = e^{\int R(x) dx}$$

Példa.

Az $x>0$, y tetszőleges kezdeti érték tartományban oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0, (xyy' = -x^2 - y^2 - x)$$

Mo. $P = x^2 + y^2 + x$, $Q = xy$, $\partial_y P = 2y$, $\partial_y Q = y$ azaz nem egzakt, de

$$\frac{\partial_y P - \partial_y Q}{Q} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x} = R(x), \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

II. Keressük a megoldást a $\mu=\mu(y)$ feltevéssel! Ekkor $\ln(\mu)=\ln(\mu)(y)$ és $\partial_x \ln(\mu)=0$, azaz

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -P \frac{\partial \ln \mu}{\partial y}$$

és

$$S(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = -\frac{\partial \ln \mu}{\partial y}$$

csak y -től függ és innen az integráló szorzó:

$$\mu(y) = e^{-\int S(y) dy}$$

Megj.: A gyakorlatban ilyenkor vesszük az

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \quad \text{ill.} \quad \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$$

törtéket és ellenőrizzük, hogy rendre csak x -től vagy csak y -től függenek. Ha valamelyik, akkor azt a megoldást választjuk.

Példa.

Oldjuk meg az

$$-x^2 \cos^4 y \, dx + \sin y \, dy = 0$$

egyenletet!

1. Mo. Nem egzakt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 4x^2 \cos^3 y (\sin y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Egzakttá tehet?, ugyanis:

$$\begin{aligned} -\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} &= \frac{4x^2 \cos^3 y (\sin y)}{x^2 \cos^4 y} = \frac{4 \sin y}{\cos y} \\ \mu &= e^{\int \frac{4 \sin y}{\cos y} dy} = e^{-4 \ln |\cos y|} = \frac{1}{\cos^4 y} \end{aligned}$$

Emiatt

$$-x^2 \, dx + \frac{\sin y}{\cos^4 y} \, dy = 0$$

Megoldása:

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3 \cos^3 y} = C$$

2. Mo. Szeparábilis is.

III. Előfordulhat, hogy szeparábilis alakban kell keresnünk a parc. diff. egyenlet megoldását, azaz $\mu(x,y) = (x) (y)$ alakban. Ekkor -- mint az könnyen ellenőrizhet -- az egyenlet

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Qf(x) - Pg(y)$$

alakú és az integráló szorzó

$$\mu(x, y) = e^{\int f(x) \, dx + \int g(y) \, dy}$$

Példa. Oldjuk meg az

Speciális esetek

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

egyenletet!

Mo. Átrendezve:

$$(x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0$$

$\partial_y P = 3y^2$, $\partial_x Q = -y^2$, azaz

$$\frac{-\text{rot}(P, Q)(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{3y^2 + y^2}{-xy^2} = \frac{-4}{x}$$

azaz célravezet, ha μ -t $\mu(x)$ alakban keressük. Ekkor

$$\mu(x) = \frac{1}{x^4}$$

Ekkor az egyenlet:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^3}{x^4}\right)dx - \frac{y^2}{x^3}dy = 0$$

egzakt, mert

$$\frac{3y^2}{x^4} - (-1)\frac{-3y^2}{x^4} = 0$$

Integrálással:

$$F(x, y) = \ln|x| + \frac{1}{-3} \frac{y^3}{x^3} + C(y), \quad F(x, y) = -\frac{1}{3} \frac{y^3}{x^3} + C(x)$$

azaz

$$\begin{aligned} \ln|x| - \frac{1}{3} \frac{y^3}{x^3} &= C \\ 3x^3 \ln c|x| &= y^3 \\ x \sqrt[3]{3 \ln c|x|} &= y(x) \end{aligned}$$

Elméleti példák

1. Az $y' = -P/Q$ homogén fokszámú egyenlet, melyben P és Q azonos fokszámú homogén függvények szintén egzaktta tehet? az $1/(Px+Qy)$ szorzóval, ha ez nem az $y' = -y/x$ egyenlet (ennek meg ismerjük a megoldását).

2. Keressünk integráló tényezőt az

$$y' + f(x)y = g(x)$$

közönséges elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlethez!

Világos, hogy nem egzakt, mert a

$$dy - (g(x) - f(x)y) dx = 0$$

alakban a keresztben vett deriváltak: 0 és $f(x)$.

$Q=1$ és $P(x,y)=-g(x)+f(x)y$ ezért a μ -t adó parc.diff. egyenlet:

$$\mu f = \frac{\partial \mu}{\partial x} - (g(x) - f(x)y) \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

Elegendő egy partikuláris megoldást találni, amit egyszerre megkapunk, ha csak az olyan μ -ket keressük, amik csak az x -től függenek, ekkor ugyanis pl. $g(x)$ nem is lesz az egyenletben. Ilyet találunk, mert:

$$\begin{aligned} \mu f &= \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \mu f(x) &= \mu' \end{aligned}$$

Ez egy szeparábilis, aminek a megoldása:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mu'}{\mu} \\ f(x) &= (\ln \mu)' \end{aligned}$$

egy partikuláris megoldás:

$$\mu(x) = e^{F(x)}$$

ahol $F'=f$.

HF: Keressük meg ezzel az integráló szorzóval az általános megoldást!

Mo.

$$e^{F(x)} dy + (-g(x) + f(x)y) e^{F(x)} dx = 0$$

Már egzakt, hiszen

$$e^{F(x)} f(x) = f(x) e^{F(x)}$$

Ekkor

$$\Phi(x, y) = ye^{F(x)} + C(x), \quad \Phi(x, y) = ye^{F(x)} + \int -g(x) e^{F(x)} dx + C(y)$$

$$C = ye^{F(x)} - \int g(x)e^{F(x)} dx$$

azaz

Gyakorlás

Oldja meg az alábbi egyenletet az a) $y(0)=0$ ill. b) $y(2\pi)=1$ kezdeti feltétel mellett!

$$x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} + xy' \cos \frac{y}{x} = 0$$

Mo. Legyen $u = y/x$, innen $y' = u'x + u$

$$\begin{aligned} \sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} + y' \cos \frac{y}{x} &= 0 \\ \sin u - u \cos u + (u'x + u) \cos u &= 0 \\ \sin u + u'x \cos u &= 0 \\ u'x \cos u &= -\sin u \end{aligned}$$

(itt megjegyezd?, hogy az $u=k$ konstansok megoldások, azaz az eredetinek az $y=kx$ megoldásai)

$$\begin{aligned} \int -\frac{\cos u}{\sin u} du &= \int \frac{dx}{x} \\ -\ln |\sin u| &= \ln |x| + C \\ \frac{1}{|\sin u|} &= K_1 |x| \\ 1 &= Kx \sin \frac{y}{x} \quad (K \neq 0) \end{aligned}$$

Függvényegyütthatós elsőrendű lineáris d.e.

$$y' + \frac{2y}{x} = \sin(x^3 + 1)$$

Mo. Homogén megoldása. $y=0$ konstans megoldás.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{2y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -2 \frac{dx}{x} \\ \ln |y| &= \ln |x|^{-2} + C \end{aligned}$$

Bolzano tétele miatt tetszőleges K valós számmal:

$$y = K \frac{1}{x^2}$$

ami a homogén általános megoldása.

Inhomogén part. keresése

$$y(x) = K(x) \frac{1}{x^2}$$

$$K'(x) \frac{1}{x^2} + K(x) \frac{-2}{x^3} + K(x) \frac{2}{x^3} = \sin(x^3 + 1)$$

$$K'(x) = x^2 \sin(x^3 + 1)$$

$$K'(x) = \frac{1}{3} 3x^2 \sin(x^3 + 1)$$

$$K(x) = -\frac{1}{3} \cos(x^3 + 1)$$

$$y = K \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{3} \cos(x^3 + 1) \frac{1}{x^2}$$

2. gyakorlat

4. gyakorlat