<Matematika A3a 2008

Tartalomjegyzék

Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet

Csak a másodrend? esetet tárgyaljuk:

$$ay''+by'+cy=h(x)$$

ha *a*, *b*, *c* **R**.

Ilyenkor a homogén egyenlet megoldását az *a* ^{2}+*b* +*c*=0 karakterisztikus egyenlet megoldásából származó gyökökb?l száraztatjuk (bizonyítása a bizonyítások között).

$$\begin{array}{ll}\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbf{R} & y_H(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}\\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda\in\mathbf{R} & y_H(x)=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}\\ \lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i\in\mathbf{C} & y_H(x)=C_1e^{\alpha x}\cos(\beta x)+C_2e^{\alpha x}\sin(\beta x)\end{array}$$

Az inhomogén egyenlet megoldását a következ? alakban keressük. Ha az inhomogén tag az alábbi alakban írható

$$h(x)=e^{ax}\left(p(x)\cos(bx)+q(x)\sin(bx)\right)$$

ahol p(x) és q(x) polinomok és a *a*+i*b* **C** szám *m* szeres gyöke az *a* ^{2}+*b* +*c* karakterisztikus polinomnak, akkor az $y_p(x)$ partikuláris megoldásra a feltevés:

$$y_p(x)=x^me^{ax}\left(P(x)\cos(bx)+Q(x)\sin(bx)\right)$$

ahol P(x) és Q(x) olyan polinomok, hogy deg P(x)=deg Q(x)= max{deg p(x), deg q(x)}.

Ha **nincs** küls? rezonancia, akkor az alábbi "http://wiki.math.bme.huszimbolikus"http://wiki.math.bme.hu táblázat súg, hogy az inhomogén tag (gerjesztés) ismeretében milyen alakban keressük a partikuláris megoldást. (Ha van küls? rezonancia, akkor annyiszor szorozzuk meg *x*-szel ezt az értéket, hogy az már éppen lineárisan független legyen a homogén alapmegoldásoktól.)

$h(x)$	$y_P(x)$
$7x-8$	$Ax+B$
$-x^2+\frac{1}{8}x-\sqrt{2}$	Ax^2+Bx+C
$\frac{1}{7}e^{2x}$	Ae^{2x}
$\sin(3x),\ \cos(3x)$	$A\sin(3x)+B\cos(3x)$

Rezonanciák

1. $y'' + 9y = \sin(3x)$

Mo. $\lambda^2 + 9 = 0$, azaz $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Innen

$$y_H(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

Mivel

$$h(x) = \sin(3x)$$

ezért *a* + *bi* = 3*i* egyszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek, m=1 és az általános P(x), Q(x) polinomok konstansok: A,B, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az

$$y_p(x) = Ax\cos(3x) + Bx\sin(3x)$$

alakban keresend?.

2. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

Mo. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, azaz $\lambda_{1,2} = 2$. Innen

$$y_H(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Mivel

$$h(x) = e^{2x}$$

ezért *a* = 2 kétszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek, és ezért m=2 az általános P(x), Q(x) polinomok közül csak P(x) marad, mert b=0 lévén Q(x) kiesik, de P(x)=A állandó, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az

$$y_p(x) = Ax^2 e^{2x}$$

alakban keresend?.

3. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$

Mo. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, azaz $\lambda_{1,2} = 1; \qquad 2$. Innen

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Mivel

$$h(x) = xe^x$$

ezért *a* = 1 egyszeres megoldása a karakterisztikus egyenletnek, és ezért m=1 az általános P(x), Q(x) polinomok közül csak P(x) marad, mert b=0 lévén Q(x) kiesik (sin(0)=0), de P(x)=Ax+B els?fokú, mert p(x)=x (hiszen cos(0)=1 és ez megmaradt), így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása az

$$y_p(x) = x(Ax+B)e^x$$

alakban keresend?.

Állandó együtthatós els?rend? inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer

Az

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

egyenletrendszerben **A** konstans valós mátrix, **b**(t) vektorfüggvény. Csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor **A**-nak vannak független sajátvektorai.

A homogén egyenlet megoldását az úgy nevezett mátrix alapmegoldásból állítjuk el?. Keresünk tehát olyan $\mathbf{\Psi}(t)$ mátrixfüggvényt, melyre:

$$\dot{\mathbf{\Psi}}(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{\Psi}(t)$$

Belátjuk, hogy erre az **A** mátrix $\mathbf{s}_{1,2}$ sajátvektoraiból összerakott

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} | & | \\ e^{\lambda_1 t}\cdot\mathbf{s}_1 & e^{\lambda_2 t}\cdot\mathbf{s}_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

mátrixfüggvény, alkalmas, ahol persze $\mathbf{A}\mathbf{s}_i = \lambda_i\mathbf{s}_i$ (i=1;2). Ugyanis

$$\dot{\mathbf{\Psi}}(t) = \begin{bmatrix} | & | \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\cdot\mathbf{s}_1 & \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\cdot\mathbf{s}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ e^{\lambda_1 t}\cdot\mathbf{A}\mathbf{s}_1 & e^{\lambda_2 t}\cdot\mathbf{A}\mathbf{s}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{\Psi}(t)$$

Ilyenkor pedig a megoldás tetsz?leges $\mathbf{c}$ konstans általános vektorral:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\cdot\mathbf{c} = \begin{bmatrix} | & | \\ e^{\lambda_1 t}\cdot\mathbf{s}_1 & e^{\lambda_2 t}\cdot\mathbf{s}_2 \\ | & | \end{bmatrix}\cdot\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t}s_{11} + c_2 e^{\lambda_2 t}s_{21} \\ c_1 e^{\lambda_1 t}s_{12} + c_2 e^{\lambda_2 t}s_{22} \end{bmatrix}$$

Az inhomohén egy partikuláris megoldását a következ?képpen keressük meg. Feltesszük az állandó variálása módszerével, hogy

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Psi}(t)\cdot\mathbf{c}(t)$$

Ezt behelyettesítve az inhomogén egyenletbe kapjuk, hogy

$$(\mathbf{\Psi}(t)\cdot\mathbf{c}(t))^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{\Psi}(t)\cdot\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t)$$

$$\dot{\mathbf{\Psi}}(t)\cdot\mathbf{c}(t)+\mathbf{\Psi}(t)\cdot\dot{\mathbf{c}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{\Psi}(t)\cdot\mathbf{c}(t)+\mathbf{b}(t)$$

De mivel tudjuk, hogy $\dot{\mathbf{\Psi}}(t)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{\Psi}(t)$, ezért

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{\Psi}(t)\cdot\mathbf{c}(t)+\mathbf{\Psi}(t)\cdot\dot{\mathbf{c}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{\Psi}(t)\cdot\mathbf{c}(t)+\mathbf{b}(t)$$

Ezért kiejtve, amit ki lehet, csak az

$$\mathbf{\Psi}(t)\cdot\dot{\mathbf{c}}(t)=\mathbf{b}(t)$$

paraméteres egyenletrendszert kell megoldani $\dot{\mathbf{c}}(t)$-re.

Példák

4.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1 & 3x_2\\ 3x_1 & 2x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^t\\ 0\end{pmatrix}$$

Mo.

$$\begin{array}{l}\dot{x_1}=2x_1+3x_2+e^t\\ \dot{x_2}=3x_1+2x_2\end{array}$$

Homogén:

$$\begin{array}{l}\dot{x_1}=2x_1+3x_2\\ \dot{x_2}=3x_1+2x_2\\ \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\end{array}$$ karakterisztikus polinomjának megoldásai: = – 1;5

Sajátvektorai rendre: (1,-1), (1,1) ezekb?l a megoldás. Innen

$$\Psi(t)=\begin{pmatrix}e^{-t} & e^{5t}\\ -e^{-t} & e^{5t}\end{pmatrix}$$

és

$$x_H(t)=c_1\begin{pmatrix}e^{-t}\\ -e^{-t}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}e^{5t}\\ e^{5t}\end{pmatrix}=\Psi(t)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

Inhomogén:

$$\Psi(t)\cdot c'(t)=\begin{pmatrix}e^t\\ 0\end{pmatrix}$$

Gauss--Jordan-nal:

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{5t} & e^{t} \\ -e^{-t} & e^{5t} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{5t} & e^{t} \\ 0 & 2e^{5t} & e^{t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{5t} & e^{t} \\ 0 & e^{5t} & \frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & \frac{1}{2}e^{t} \\ 0 & e^{5t} & \frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix} \sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right.$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t} \\ -\frac{1}{8}e^{-4t} \end{pmatrix}$$

$$x_P(t) = \Psi(t) \cdot c(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t} \\ -\frac{1}{8}e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}e^{t} \\ -\frac{3}{8}e^{t} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8}e^{t} \\ -\frac{3}{8}e^{t} \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 & -2x_2 \\ 6x_1 & -2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. gyakorlat
5. gyakorlat