<Matematika A3a 2008

Tartalomjegyzék

Megoldási stratégiák

nemlineáris

szeparábilis: dy/dx=g(x)/f(y) és f(y)dy=g(x)dx

szeparábilisra visszavezethet?:

y'=f(ax+by+c) alakú, ilyenkor u=ax+by+c, u'=a+by' vezet célra
y'=f(y/x) alakú, ilyenkor u=y/x és y'=u'x+u vezet célra

egzakt

egzaktra visszavezethet?
m=m(x)
m=m(y)

lineáris

függvényegyütthatós els?rend?: y'+f(x)y=h(x).

Ekkor az állandó variálásával kell számolni: I., y'+f(x)y=0 megoldása: y=y(x,c) II., y=y(x,c(x)) alakban keressük a megoldást

állandó együtthatós:

kezdeti feltétellel: Laplace-transzformációval
egyenlet másodrend?: ay''+by'+cy=h(x), y(0)=... y'(0)=...
egyenletrendszer els?rend?: y_1, y_2, y_1(0)=... y_2(0)=...,

általános megoldást keresünk:
egyenlet: ay''+by'+cy=h(x) próbafüggvény módszer (böhöm képletek)
egyenletrendszer (nincs kezdeti feltétel, általános megoldást keresünk) A sajátértékei, vektorai

Laplace-transzformáció

t, *s*>0

$$t \mapsto f(t) \qquad \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \qquad s \mapsto F(s); \qquad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Linearitás

$$\mathcal{L}\left\{af(t) + bg(t)\right\} = a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

Deriváltak

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$
$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

Elemi függvények

$$\mathcal{L}\{\, t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\, e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\{\, t^n e^{-at}\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\,\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{\,\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Másodrend? állandó együtthatós inhomogén lineáris kezdetiérték feladat

1.

$$y'' - y = e^{-t} \qquad\qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Mo.

$$\mathcal{L}\{y\} = Y$$

$$s^2Y - sy(0) - y'(0)s - Y = \frac{1}{s+1}$$
$$s^2Y - s - Y = \frac{1}{s+1}$$
$$Y(s^2-1) - s = \frac{1}{s+1}$$
$$Y(s^2-1) = \frac{1}{s+1} + \frac{s(s+1)}{s+1}$$
$$Y = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(s^2-1)}$$

Parciális törtekre bontás:

$$\frac{s^2+s+1}{(s+1)(s^2-1)} = \frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1}$$
$$s^2+s+1 = A(s-1) + B(s+1)(s-1) + C(s+1)^2$$

Innen s=1-gyel 3=4C, s=-1-gyel 1=-2A, és s=0-val 1=-A-B+C. Azaz

$$C = 3/4, \quad A = -1/2, \quad B = 1/4$$

$$\frac{s^2+s+1}{(s+1)(s^2-1)} = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{1/4}{s+1} + \frac{-1/2}{s-1}$$

$$Y = \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{1/4}{s+1} + \frac{-1/2}{s-1}$$

$$y(t) = \frac{-1}{2}(te^{-t}) + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t}$$

2.

$$y'' - 10y' + 9y = 5t, \qquad y(0) = -1, \; y'(0) = 2$$

Mo.

$L(y') = sY - y(0)$
$L(y'') = s^2Y - sy(0) - y'(0)$

$$L(5t) = \frac{5}{s^2}$$
$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - 10sY + 10y(0) + 9Y = \frac{5}{s^2}$$
$$s^2Y + s - 2 - 10sY - 10 + 9Y = \frac{5}{s^2}$$
$$Y(s^2 - 10s + 9) + s - 12 = \frac{5}{s^2}$$
$$Y = \frac{\frac{5}{s^2} - s + 12}{s^2 - 10s + 9}$$
$$Y = \frac{5}{s^2(s-9)(s-1)} - \frac{s-12}{(s-9)(s-1)}$$
$$Y = \frac{-s^3 + 12s^2 + 5}{s^2(s-9)(s-1)}$$
$$\frac{-s^3 + 12s^2 + 5}{s^2(s-9)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-9} + \frac{D}{s-1} = \frac{As(s-9)(s-1) + B(s-9)(s-1) + C}{s^2(s-9)(s-1)}$$

A gyököket beírva: s=0-ra B=5/9

s=1-re D=16/(-8)=-2

s=9-re C.8.81=-243+12.27+5 C=31/81

s=2-re A=50/81

Visszatranszf.

$$y(t) = \frac{50}{81} + \frac{5}{9}t + \frac{31}{81}e^{9t} - 2e^t$$

Els?rend? állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer kezdetiérték feltétellel

3.

$$\begin{array}{l} \dot{x_1} = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x_2} = 2x_1 + x_2 \end{array}$$

A $x_1(0) = 2,\ x_2(0) = -2$ kezdetiérték feltétellel.

Mo.

$$\begin{array}{l} sX_1 - 2 = X_1 + 2X_2 \\ sX_1 + 2 = 2X_1 + X_2 \end{array}$$

Összeadva ?ket:

$$\begin{array}{l} s(X_1 + X_2) = 3(X_1 + X_2) \\ (s-3)(X_1 + X_2) = 0 \end{array}$$

Ami csak akkor teljesülhet minden s-re, ha $X_2 = -X_1$. Innen

$$\begin{array}{l} sX_1 - 2 = X_1 - 2X_1 \\ (s+1)X_1 = 2 \\ X_1 = 2\dfrac{1}{s+1} \\ X_2 = -2\dfrac{1}{s+1} \end{array}$$

És végül

$$\begin{array}{l} x_1(t) = 2e^{-t} \\ x_2(t) = -2e^{-t} \end{array}$$

4.

$$\dot{x_1} = 2x_1 + 3x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 4x_2$$

A $x_1(0)=1,\ x_2(0)=-1$ kezdetiérték feltétellel.

Mo.

$$\begin{aligned} sX_1 - 1 &= 2X_1 + 3X_2 \\ sX_2 + 1 &= X_1 + 4X_2 \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} X_1(s-2) &= 3X_2 + 1 \\ X_2(s-4) + 1 &= X_1 \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} 3X_2 + 1 &= (X_2(s-4)+1)(s-2) \\ X_2(3-(s-4)(s-2)) &= s-3 \\ X_2 &= \frac{s-3}{3-(s-4)(s-2)} = \frac{-s+3}{(s-5)(s-1)} \end{aligned}$$

...

[**5.**

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 & -2x_2 \\ 6x_1 & -2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

]

4. gyakorlat
6. gyakorlat