<*Matematika A3a 2008*

Tartalomjegyzék

Komplex számkör és reprezentációi

A komplex számok **C** halmazát és m?veleteit legalább három, lényegesen más szemszögb?l lehet láttatni. A meghatározottság kedvéért összefoglaljuk a komplex számok legfontosabb algebrai tulajdonságait. Nem térünk ki minden egyes m?veleti tulajdonságra, ezek megtalálhatók a komplex számok algebráját leíró tankönyvekben.

Algebrai modell

A komplex számok olyan

$$a + b\mathrm{i}$$

alakú formális kifejezések, ahol a és b valós számok, i pedig azzal a speciális tulajdonsággal rendelkezik, hogy

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

A komplex számok halmazát a **C** szimbólummal jelöljük, tehát

$$z \in \mathbf{C} \quad \Leftrightarrow \quad z = a + bi \qquad (a, b \in \mathbf{R})$$

itt a-t a z valós részének nevezzük és Re(z)-vel jelöljük, b-t a z képzetes részének nevezzük és Im(z)-vel jelöljük. Világos, hogy Im(z) **R**, azaz "http://wiki.math.bme.hutiszta"http://wiki.math.bme.hu valós.

Megjegyzés. A kevéssé informatív "http://wiki.math.bme.huformális kifejezés"http://wiki.math.bme.hu helyett bevezethetjük a komplex számokat valódi algebrai objektumokként. A komplex számok halmazát egy a maradékos osztással rendelkez? halmazból konstruljuk: a valós együtthatós polinomok **R**[X] halmazából. Közismert, hogy a valósegyütthatós, egyhatározatlanú polinomokal, azaz a

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

alakú kifejezésekkel, ahol az a_i-k valós számok, *n* pedig nemnegatív egész, lehet maradékosan osztani (polinomosztás). Ekkor

$$\mathbf{C} =_{\text{def}} \mathbf{R}[X]/(x^2+1)$$

azaz a komplex számok halmaza a valósegyütthatós polinomok x^2+1 polinommal történ? osztási maradékai. Világos, hogy minden ilyen maradék el?áll

$$m(x) = a + bx$$

alakban, azaz legfeljebb els?fokú polinom alakjában. Ebben a számkörben az *összeadás* a polinomösszeadás, a szorzás a polinomok szorzása (illetve ezen eredményének x^2+1-vel történ? osztási maradéka). Amikor két els?fokú polinom szorzata másodfokú, akkor sem lépünk ki a számkörb?l, hisz a

$$m(x)^2 + 1 = 0$$

polinomegyenlet megoldható, éspedig az m(x)=x polinom (az identitás) megoldás. Ekkor

$$m(x)^2 = -1$$

azaz ebben a számkörben létezik a -1-nek négyzetgyöke. Az *m(x)=x* polinom az, mely az *i* egység szerepét játssza és így is jelöljük ezt ezentúl.

Akárcsak a legfeljebb els?fokú *a* + *bx* alakú polinomok esetén, a **C**-t alkotó formális kifejezések között is értelmezhetjük az összeadást és a szorzást. Ezeket pontosan úgy definiáljuk, mint az *a* + *bx* alakú polinomok összegét és szorzatát, azzal a specialitással, hogy ahol a polinomok a szorzást követ?en másodfokúvá válnak, ott a komplex számok az i^2=-1 egyenl?ség miatt visszaérkeznek az *a* + *b*i alakú kifejezések körébe. Ezért lesz **C** zárt arra a szorzásra, amit a polinomok mintájára definiálunk.

Már innen is látszik, hogy a komplex számok halmaza kétdimenziós valós test feletti vektortér. Kimondhatjuk tehát:

Állítás. A **C** számkör a komplex számok

(*a*+*b*i) + (*c*+*d*i) = (*a*+*c*) + (*b*+*d*)i összeadásával és a
(*a*+*b*i) = *a* + *b*i, a valós számmal való szorzással

kétdimenziós valós vektorteret alkotnak és így lineárisan izomorfak a valós számpárok $\mathbf{R}^2$ vektorterével.

Halmazelméleti modell

Az algebrai modellben nem teljesen világos, hogy mi is az i elem. Az el?z? állítás azonban lehet?séget biztosít arra, hogy konkrétan megadjuk a komplex számok halmazát mindenféle olyan kifejezés használata nélkül, mint "http://wiki.math.bme.huformális kifejezés"http://wiki.math.bme.hu stb. (Valójában persze az algebrai modell is jól értelmezett módon adja meg a komplex számok halmazát, ha az *a* + *b*i alakú formális kifejezéseken az **R**[X] polinomgy?r?nek az (1+X^2) polinommal történ? maradékos osztásának maradékait értjük).

A számpár reprezentációban:

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$$

az összeadás az $\mathbf{R}^2$-beli vektorösszeadás, a szorzás, pedig a

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - db) + (ad + bc)\mathrm{i}$$

m?velet, mely természetesen a "http://wiki.math.bme.hupolinomszorzásnak"http://wiki.math.bme.hu az el?z? állításbeli izomorfizmus által létesített képe.

Ez az interpretáció azért fontos, mert explicitté teszi, hogy a **C** örökli az $\mathbf{R}^2$ topológiáját.

Geometriai modell

A szorzással együtt **C** egységelemes, nullosztómentes algebrát alkot (tehát vektortér és van egy mindkét változójában lineáris bels? szorzás, melyben van egység és ?nullával nem lehet osztani?). Felmerülhet a gyanúnk, hogy talán reprezentálhatjuk a komplex számokat a 2×2-es valós mátrixon $\mathrm{M}_{2\times 2}$ (**R**) algebrájának egy részalgebrájaként. Ezt a komplex számok trigonometrikus alakja segítségével tehetjük meg. Ismert, hogy a komplex számmal való szorzás forgatva nyújtás, azaz lineáris leképezés az $\mathbf{R}^2$ síkon:

$$\mathbf{C} \ni z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \;\equiv\; \begin{pmatrix} r\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$$

Világos, hogy ekkor az *a* + *b*i kanonikus alakot használva a komplex számoknak megfelel? mátrixok halmaza:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbf{R}) : a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

Ez a mátrixhalmaz kétdimenziós altér az $\mathrm{M}_{2\times 2}$ (**R**) algebrában, melyet például a közvetve onnan is láthatjuk, hogy forgatva nyújtások is alteret alkotnak a lineáris leképezések terében.

Komplex számkör unicitása

C, azaz a komplex számok teste kétdimenziós valós vektortér. **C** elemei reprezentálhatók az $\mathbf{R}^2$ síkon, a következ? megfeleltetésekkel:

$$\mathbf{C} \ni a + bi \equiv (a, b) \in \mathbf{R}^2$$

a vektortérm?veletek pedig:

$\mathbf{C} \ni (a + bi) + (c + di) \equiv (a, b) + (c, d) \in \mathbf{R}^2$ vektorösszeadás (*a*, *b*, *c*, *d* **R**)
$\mathbf{C} \ni \lambda \cdot (a + bi) \equiv \lambda.(a, b) \in \mathbf{R}^2$ valós számmal való szorzás (, *a*, *b* **R**)

A komplex számok körét a komplex szorzás tulajdonságai egyértelm?sítik. **C** nem csak kétdimenziós valós vektortér, de a szorzással algebra is, s?t **C** *az egyetlen kétdimenziós kommutatív, nullosztómentes valós algebra* -- izomorfizmus erejéig. Sok megjelenési formája lehet a komplex számoknak, de bármely két reprezentáció olyan, hogy található olyan kölcsönösen egyértelm? leképezés köztük, mely lineáris és megtartja a szorzást is (azaz algebra izomorfizmus).

A nullosztómentesség és a kommutativitás jellemz?en a mátrixalgebrákban nemtriviális tulajdonság. A komplex számok olyan lineáris leképezéseknek felelnek meg, melyek mátrixa

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

A komplex számok szorzása itt a mátrixszorzás.

C topológiája

R^2 gömbi környezetei lesznek **C** gömbi környezetei. Általában, minden topologikus fogalom **C**-ben **R**^{2}-re vezetünk vissza. Tehát, adott $r > 0$ valós számra és z_0 **C** számra:

$$\mathrm{B}_r(z_0) \;=\; \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

az r sugarú z_0 középpontú nyílt gömbi környezet. Itt a | . | abszolútérték helyett, mely a || . ||$_2$ euklideszi norma, elvileg **R**^{2} bármelyik normája alkalmas lenne, hisz véges dimenziós normált térben minden norma ekvivalens, azaz ugyanazokat a nyílt halmazokat határozzák meg. Szokásos módon értelmezettek az el?bb említett nyílt halmazok is. **C nyílt**, ha minden pontjával együtt, annak egy nyílt gömbi környezetét is tartalmazza:

$$\forall z \in \Omega \quad \exists r > 0 \quad \mathrm{B}_r(z) \subseteq \Omega$$

Egy A **C** halmaz belsején értjük azon pontok halmazát, melyeknek egy egész gömbi környezete benne van A-ban

$$\mathrm{int}(A) = \{z \in \mathbf{C} \mid \exists r > 0 \quad \mathrm{B}_r(z) \subseteq A\}$$

Mivel **R**^{2}-ben minden norma ekvivalens (ugyanazokat a nyílt halmazokat határozzák meg), ezért adott feladatokban tetsz?leges, a feladathoz jól illeszked? normát választhatunk. Topologikus szempontokból a komplex és **R**^{2}-**R**^{2} függvények között a következ? azonosítással élhetünk. Ha f: **C** $\longrightarrow$ **C** függvény, akkor $z = x + \mathrm{i}y$, $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, ill.

$$f \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

C kompaktifikálása

Kompakt egy K halmaz, ha teljesül rá, hogy akárhogy is fedjük le nyílt halmazok rendszerével, azok közül már véges sok halmaz is lefedi a K-t. Szimbolikusan:

K kompakt, ha minden ($_i$)$_{i \quad I}$ halmazrendszerhez, melyre

1. $_i$ nyílt minden i I-re és
2. K U($_i$)$_{i \quad I}$

létezik J I véges indexhalmaz, hogy K U($_i$)$_{i \quad J}$

$\mathbf{R}^N$-ben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Tehát maga **C** nem kompakt, hisz nem korlátos (bár zárt). Viszont **C** egyetlen egy ponttal kib?vítve már kompakttá tehet?, ugyanis egy ideális pont hozzávételével **C** kölcsönösen egyértelm? és folytonos kapcsolatba hozható a gömbfelülettel, mely $\mathbf{R}^3$-ban kompakt. Ezt a sztereografikus projekcióval oldjuk meg.

A Riemann-gömb konstrukciójához vegyük az $\mathbf{R}^3$-ban az origó középponttú egységgömböt és gondoljunk úgy az [xy] síkra, mint a **C** komplex számsíkra. Az egységgömb pontjait a következ? módon feleltetjük meg a komplex számoknak. Tekintsük a gömbön a (0,0,1) koordinátájú *P* pólust és egy *a* + *b*i komplex szám esetén az (*a*,*b*,0) pontot kössük össze *P*-vel egy *e* egyenes által. Ekkor az *e* egyetlen pontban metszi az egységgömböt, mely kijelöli az *a* + *b*i-nek megfelel? pontot. Ha az *a* + *b*i-nek megfeleltetett Riemann-gömbfelületbeli pont koordinátái (x,y,z), akkor ezek kapcsolata:

$$a+b\mathrm{i}=\frac{x+\mathrm{i}y}{1-z}$$

Megjegyzés. Ismer?s geometriai leképezésre bukkanhatunk, ha a Riemann-gömbfelület egy (x,y,h) és (x,y,-h) pontjának megfelel? komplex számnak a kapcsolatát írjuk fel. Legyen ugyanis

$$z=\frac{x+\mathrm{i}y}{1-h} \text{ és } w=\frac{x+\mathrm{i}y}{1+h}$$

Ekkor a *z* konjugáltját a *w*-vel összeszorozva azt kapjuk, hogy:

$$w\cdot\overline{z}=1$$

Amib?l az következik, hogy a végpontok origótól vett távolságának a szorzata 1, azaz 1 a két szám hosszának mértani közepe. Ez viszont azt jelenti, hogy *w* nem más, mint a *z inverziója* az egységkörre vonakozóan és az inverziót kifejez? komplex függvény a

$$w=\frac{1}{\overline{z}}$$

leképezés. Eszerint a reciprok-konjugált (de a reciprok is) egy origón át nem men? kört körbe, az origón átmen? kört egyenesbe, egy origón át nem haladó egyenes egy origón átmen? körbe és egy origón áthaladó egyenest saját magába képezi.

Ha tehát a **C**-hez hozzáveszünk egy -nel jelölt objektumot, és ennek megfeleltetjük a *P* pólust, akkor a

$$\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$$

halmaz kölcsönösen egyértelm? megfeleltetésbe hozható a Riemann-gömbfelülettel. Ahhoz, hogy ennek folytonosságáról beszélhessünk, definiálnunk kell gömbi környezeteit. Ezek a következ? alakú halmazok lesznek:

$$\mathrm{B}_r(\infty)=\left\{z\in\mathbf{C}:|z|>\frac{1}{r}\right\}\cup\{\infty\}$$

ahol $r > 0$.

Feladat. Igazoljuk, hogy **C**U{ } *kompakt* (toplologikusan, ill. gyakorlásképpen sorozatkompakt)!

(Útmutatás: az els?höz az origó körüli zárt gömbök kompaktságát, a másodikhoz a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételt kell használni (persze korlátos sorozatra).)

Ha **C**U{ }-t lefedi egy nyílt halmazrendszer, akkor -t is lefedi bel?lük egy, mondjuk *U*. *U* lefedi az egy gömbi környezetét, mondjuk $B_r($ $)$-t. Elegend? tehát tekintenünk **C**U{ } lefedéséhez a halmazrendszerb?l az *U*-t és a $B_r($ $)$ komplementerét lefed? halmazokat. De ez utóbbiakból véges sok is van melyek még mindig lefedik, mert $B_r($ $)$ komplemetere a 0 középponttú 1/r sugarú zárt körlap, mely kompakt.

Komplex sorozatok

Minthogy **C** $\mathbf{R}^2$ (mint normált vektortér), a komplex sorozatok azon tulajdonságai, melyek a vektortérm?veletekkel és az | . | || . $||_2$ euklideszi normával kapcsolatosak mind $\mathbf{R}^2$-b?l ismertnek tekinthet?k. A sorozatok konvergenciáját ugyanúgy definiáljuk, mint $\mathbf{R}^2$-ben:

$$(z_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}^+} \text{ konvergens}$$

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$\exists z \in \mathbf{C} \quad \forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+ \quad \exists N \in \mathbf{Z}^+ \quad \forall n \in \mathbf{Z}^+ \quad (n > N \ \Rightarrow \ |z_n - z| < \varepsilon)$$

Ekkor a fenti *z* egyértelm?, és ez a sorozat határértéke ($\lim(z_n)$)

A legfontosabb jellemzése tehát a konvergenciának az $\mathbf{R}^2$-b?l kölcsönzött, a komponensekre vonatkozó kritérium:

Tétel ? A **C**-beli $(z_n) = (a_n + ib_n)$ sorozat konvergens akkor és csak akkor, ha

(a_n) konvergens és
(b_n) konvergens.

Ekkor $\lim(z_n) = \lim(a_n) + i \cdot \lim(b_n)$

Fontos látni a kapcsolatot a sorozathatárék és a függvényhatárérték között. Egy ($_n$) komplex sorozat nem más, mint egy

$$\zeta : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{C}$$

függvény. Ha **Z**-t komplex részhalmaznak gondoljuk (ahogy az is), akkor az egyetlen torlódási pontja a . Ezért egy sorozatnak pontosan akkor létezik határértéke és ez a w szám, ha mint függvénynek létezik határértéke és az a w. Azaz:

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n = w \in \overline{\mathbf{C}} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_{\infty} \zeta = w \in \overline{\mathbf{C}}$$

Ebb?l következik, hogy a függvényhatárértékre vonatkozó minden m?veleti szabály örökl?dik a sorozathatárértékre.

Nullsorozatok

A 0 komplex számhoz tartó sorozatok nullsorozatok. Az abszolútérték és a szorzás jó tulajdonságai miatt örökl?dnek a valós sorozatok alábbi tulajdonságai.

Állítás ? Legyen (z_n) komplex számsorozat.

1. *abszolútérték:* $z_n \longrightarrow 0$ akkor és csak akkor, ha $|z_n| \longrightarrow 0$
2. *eltolás:* $z_n \longrightarrow z$ akkor és csak akkor, ha $(z_n ? z) \longrightarrow 0$
3. *"http://wiki.math.bme.huK · 0"http://wiki.math.bme.hu:* ha (w_n) korlátos és $z_n \longrightarrow 0$, akkor $(w_n \cdot z_n) \longrightarrow 0$
4. *majoráns:* ha $(\ _n) \longrightarrow 0$ valós és $|z_n| < \ _n$, akkor $z_n \longrightarrow 0$
5. *hányadoskritérium:* ha $\limsup \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$, akkor $z \longrightarrow 0$
6. *gyökkritérium:* ha $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, akkor $z \longrightarrow {}_n0$

n

Ezek közül **C**-ben a legjellegzetesebb a *"http://wiki.math.bme.huK · 0"http://wiki.math.bme.hu*, hiszen ez azt állítja, hogy nem csak a $_n.z_n$ skalárral történ? szorzás esetén igaz a "http://wiki.math.bme.hukorlátos - nullához"http://wiki.math.bme.hu tartó kritérium (mindkét változóban), hanem komplex szorzás is ilyen.

1. Feladat

$$\left(\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3n}}\right)^n \longrightarrow ?$$

(Útmutatás: hivatkozzunk a "http://wiki.math.bme.hukorlátos szor nullához tartó"http://wiki.math.bme.hu kritériumra.)

$$\left(\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3n}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n^n}}$$

2. Feladat.

$$\frac{\sqrt[n]{n^3+2n}}{i+1} \longrightarrow ?$$

ahol az *n*-edik gyök a valós számból vont valós gyök.

(Útmutatás: "http://wiki.math.bme.hui-telenítsük"http://wiki.math.bme.hu a nevez?t.)

$$\frac{\sqrt[n]{n^3+2n}}{i+1} = \frac{(i-1)\sqrt[n]{n^3+2n}}{-1-1} = \frac{i\sqrt[n]{n^3+2n} - \sqrt[n]{n^3+2n}}{-2} \to \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

ugyanis

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n}^3 = \sqrt[n]{n^3} \leq \sqrt[n]{n^3+2n} \leq \sqrt[n]{n^3+\frac{n^3}{2}} = \sqrt[n]{\frac{3}{2}n^3} = \sqrt[n]{\frac{3}{2}}\sqrt[n]{n}^3 \to 1$$

3. Feladat.

$$\left(\frac{n+i}{n}\right)^n \to ?$$

(Útmutatás: használjunk trigonometrikus alakot és hatványozzunk.)

$$\left(\frac{n+i}{n}\right)^n = \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^n \cdot \left(\cos\left(n\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + i\sin\left(n\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \to$$

$$\to \cos 1 + i\sin 1$$

Mert a szögfüggvények argumentumában lév? sorozat az 1-hez tart (pl L'Hospital-szabállyal majd átviteli elvvel ellen?rizhet?), a els? szorzó pedig az 1-ehez tart (rend?relvvel). Az argumentumokban lév? értéket tertmészetesen radiánban kell venni: nem 1?, hanem 1 rad.

Komplex sorok

Minden normált térben definiálhatók sorok és ezek konvergenciája, így **C**-ben is. Az (z_n) sorozat

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

részletösszegeinek (s_n) sorozatát a (z_n) -b?l képzett **sor**nak nevezzük és $\sum(z_n)$-nel jelöljük. Azt mondjuk, hogy a $\sum(z_n)$ sor konvergens és összege a *w* komplex szám, ha (z_n) részletösszegeinek sorozata konvergens és határértéke *w*. Ekkor az összeget a

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

szimbólummal jelöljük.

Komponensek

Az egyik módja, hogy a komplex sorok konvergenciáját visszavezessük a valósokra, ha a komponenssorozatokat vesszük:

$$\sum(z_n) = \sum(x_n + iy_n)$$

esetén az összegeket elképzelve, azokból az i kiemelhet?, így

$$\sum(z_n) = \sum(x_n) + i\sum(y_n)$$

ahol az összeget és a szorzást tagonként végezzük. Ekkor egy sor ponrosan akkor konvergens, ha mindkét komponense konvergens.

Cauchy-kritérium és abszolút konvergencia

Világos, hogy egy sor, mint részletösszegsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat. Ez a Cauchy-kritérium sorokra.

Létezik az abszolút konvergencia fogalmai is. Egy sor abszolút konvergens, ha a tagjai abszolútértékéb?l képezett sorozat konvergens. Igaz az, hogy egy normált tér akkor és csak akkor teljes, ha minden abszolút konvergens sor konvergens benne. (És **C** teljes, mert minden Cauchy-sorozat konvergál benne, ami pont annak a módja, hogy belássuk az el?bbi kritériumot.) Persze az el?fordul a teljes terekben is, hogy konvergens sorozatok nem lesznek abszolút konvergensek.

Kritériumok az abszolút konvergenciára

Az abszolút konvergencia fenti kritériumából egy sor komplex sorokra vonatkozó kritérium adódik a valósból.

Tétel ? Legyen (z_n) komplex számsorozat.

1. **Szükséges kritérium:** Ha $\sum(z_n)$ konvergens, akkor (z_n) nulsorozat.
2. **Geometriai sor:** ha $|z| < 1$, akkor $\sum_{(0)}(z^n)$ konvergens és az összege: $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$
3. **Összehasonlító kritérium:** ha az $\sum(r_n)$ valós sor konvergens és $|z_n|$? r_n majdnem minden n-re, akkor $\sum(z_n)$ abszolút konvergens (*majoráns-kritérium*). Ha az $\sum(r_n)$ pozitív valós sor divergens és r_n ? $|z_n|$ m.m., akkor $\sum(z_n)$ divergens (*minoráns-kritérium*).
4. **p-edik hatvány próba:** ha $p > 1$ valós, akkor a $(\sum_1 \frac{1}{n^p})$ valós sor konvergens.

   Ha 0 ? p ? 1, akkor a $(\sum_1 \frac{1}{n^p})$ valós sor divergens.
5. **Hányadoskritérium:** ha $\limsup \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$, akkor $\sum(z_n)$ abszolút konvergens. Ha a "http://wiki.math.bme.huliminf"http://wiki.math.bme.hu > 1, akkor divergens
6. **Gyökkritérium:** ha $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, akkor $\sum(z_n)$ abszolút konvergens. Ha a "http://wiki.math.bme.hulimsup"http://wiki.math.bme.hu > 1, akkor divergens.

Megjegyezzük, hogy ha a gyökök és hányadosok sorozata konvergál, akkor ugyanahhoz a számhoz konvergálnak.

4. Konvergens-e illetve abszolút konvergens-e?

$$\sum\left(\frac{i^n}{n}\right)$$

5.

1. Konvergens-e és mi a határértéke: $\frac{n!}{n^n}i^n$
2. Konvergens-e $\sum\left(\frac{n!}{n^n}i^n\right)$
3. Milyen z-re konvergens: $\sum\left(\frac{n!}{n^n}z^n\right)$

(Útmutatás: használjuk a hányadoskritériumot, vagy vizsgáljuk, hogy milyen rendben tartanak a végtelenhez az összetev?sorozatok.)

$$\frac{\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}i^{n+1}\right|}{\left|\frac{n!}{n^n}i^n\right|}=\frac{n+1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(n+1)}\to\frac{1}{e}<1$$

azaz 0-hoz tart-

6.

1. Konvergens-e és mi a határértéke: $\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n^4}}$
2. Konvergens-e $\sum\left(\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n^4}}\right)$
3. Milyen z-re konvergens: $\sum\left(\frac{1}{\left(1+\frac{i|z|}{n}\right)^{n^4}}\right)$

(Útmutatás: használjuk a gyökkritériumot.)

$$\sqrt[n]{\left|1+\frac{i}{n}\right|^{n^4}}=\left|1+\frac{i}{n}\right|^{n^3}=\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\right)^n\geq(1+\varepsilon)^n\to+\infty$$

Így a reciproka a 0-hoz tart, azaz a limszup < 1.

5. gyakorlat
7. gyakorlat