

Tartalomjegyzék

- 1 Komplex integrál
 - ♦ 1.1 Görbék a komplex síkon
 - ◊ 1.1.1 Példák
 - ♦ 1.2 Komplex vonalmenti integrál
 - ♦ 1.3 Példa
 - ♦ 1.4 Komplex Newton--Leibniz-formula
 - ♦ 1.5 Visszavezetés valós vonalintegrálra és felületi integralra
- 2 Cirkulációmentesség
 - ♦ 2.1 Gauss-tétel
 - ♦ 2.2 Stokes-tétel
 - ♦ 2.3 Green-tétel
 - ♦ 2.4 Goursat-lemma, Cauchy-féle integráltétel
 - ♦ 2.5 Nehány topologiai fogalom

Komplex integrál

Görbék a komplex síkon

Ha a $\mathbb{C}$ -beli halmaz olyan, hogy van olyan $G:[a,b] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z(t)$ folytonos, véges sok kivétellel folytonosan differenciálható függvény, aminek az értékeszlete G , akkor G -t görbének nevezzük. A G görbe egyszerű, ha nem metszi át saját magát, azaz minden t_1, t_2 -re, ha $z(t_1) = z(t_2)$, akkor $t_1 = t_2$. G zárt, ha $z(a) = z(b)$. A görbe t -beli irányvektorán a

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$$

komplex számot értjük.

Több parameterezés is elő tudja állítani a G görbet. Ezek közül kettőt, a z_1 -et és a z_2 -t ekvivalensnek nevezünk, ha van olyan $g:[a,b] \rightarrow [c,d]$ folytonos valós függvény, ami (a,b) -n differenciálható, $g' > 0$ és $z_2 = z_1 \circ g$. Az összes parameterezések halmaza két osztályra esik szét, ezek a görbe ellentetes parameterezéseit adják.

Példák

1. Legyen $t \in [a,b]$ -re $z(t) = x(t) + iy(t)$ olyan, hogy $x(t) = x_0 + w_1 t$ és $y(t) = y_0 + w_2 t$, azaz $z(t) = z_0 + wt$. Ekkor $z(t)$ egy egyenes szakasz.

És ekkor:

$$\dot{z}(t) = w$$

2. Az origó középpontú R sugarú kör:

$$z(t) = Re^{it} \quad [0, 2\pi]$$

Hiszen ekkor a kör egyenlete:

$$\begin{aligned}x(t) &= R\cos(t) \\ y(t) &= R\sin(t)\end{aligned}$$

ahonnan a komplex írásmódban

$$z(t) = x(t) + iy(t) = R\cos(t) + iR\sin(t) = R(\cos(t) + i\sin(t))$$

ami az Euler-formula alapján:

$$z(t) = Re^{it}$$

És ekkor a deriváltja:

$$\dot{z}(t) = Ri e^{it}$$

hiszen

$$\dot{z}(t) = R\cos(t) + iR\sin(t) = -R\sin(t) + iR\cos(t) = i(R\sin(t) + R\cos(t))$$

Ha a kör középpontja $z_0 = x_0 + iy_0$, akkor

$$\begin{aligned}x(t) &= R\cos(t) + x_0 \\ y(t) &= R\sin(t) + y_0\end{aligned}$$

azaz

$$z(t) = Re^{it} + z_0$$

Komplex vonalmenti integrál

Definíció. Ha $G:[a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ görbe és f olyan komplex függvény, melyre $\text{Ran}(G) \subset \text{Dom}(f)$, és f folytonos, akkor belátható, hogy létezik a

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \cdot \Delta z_i \quad \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{\forall z_i \in G, \forall \zeta_i \in \Delta z_i \\ |\Delta z_i| \rightarrow 0}} \quad \int_G f(z) dz$$

határérték, mely egy speciális Riemann-közelítőösszeg határértéke. Itt a görbén kijelöltük a véges sok z_i pontot, melyek a szigorúan monoton (t_i) -khez tartoznak a $z_i = z(t_i)$ definícióval. Ezen $[z(t_i), z(t_{i+1})]$ görbeszakaszokon belül felvettük tetszőlegesen a ζ_i közbülső pontokat, és a $\Delta z_i = [z(t_i), z(t_{i+1})]$ szakaszokkal elkészítettük az $f(\zeta_i) \Delta z_i$ komplex szorzatokat. A határérték ezek görbére vett összegének határértéke. Ez a határérték az f függvény G -re vett komplex integrálja.

Kiszámítási formula. Belátható, hogy a fenti integrál a következőkkel egyenlő:

$$\int_G f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) dt$$

Megjegyzés A helyettesítési integrálás tetelének felhasználásával belátható, hogy ez az integrál független a paraméterezéstől, ha azok ugyanazt az irányítást határozzák meg.

Megj. A kiszámítási formulában skalarváltozós vektorértékű függvény integrálja szerepel. Ezt a következőképpen kell kiszámítani:

$$\int_a^b \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \int_a^b f_2(t) dt \end{pmatrix}$$

Példa

1. a) Legyen G a komplex egységkör pozitívan irányítva.

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

Ahol a valós Newton--Leibniz-formulát alkalmaztuk a komponensfüggvényekre.

b) Integráljuk az

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

függvény a z_0 középpontú R sugarú pozitívan irányított körre, azaz a $|z - z_0| = R$ egyenletű görbére.

Ekkor a görbe paraméterezése:

$$z(t) = R e^{it} + z_0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R e^{it}} \cdot i R e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

2. Legyen G a $z(t) = (1+2i)t$, ahol $t \in [0,1]$.

$$\int_G \bar{z} dz = \int_0^1 (1 - 2i)t \cdot (1 + 2i) dt = \int_0^1 5t dt = \frac{5}{2}$$

3. Legyen G a komplex egységkör felső fele, pozitívan irányítva.

$$\int_{|z|=1, \operatorname{Im}(z) \geq 0} \bar{z}^2 dz = \int_0^\pi e^{-2it} \cdot i e^{it} dt = \int_0^\pi e^{-it} dt = 1 - (-1) = 2$$

Komplex Newton--Leibniz-formula

Ha az f komplex függvény, olyan, hogy van olyan komplex differenciálható F , melyre $F' = f$, akkor azt mondjuk, hogy az F az f primitív függvénye.

Komplex Newton--Leibniz-formula. Ha a nyílt halmazon értelmezett f komplex függvénynek primitív függvénye az F , akkor minden az f értelmezési tartományában haladó $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ görbére:

$$\int_G f(z) dz = F(b) - F(a)$$

(Ha még nem tudjuk, hogy reguláris függvény analitikus, akkor f -ről fel kell tennünk, hogy folytonos.)

4. Legyen $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Mi az egységkörre az integrálja?

$$F(z) = -\frac{1}{z}$$

primitívfüggvénye f -nek, ezért

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz = 0$$

hiszen zárt a görbe, azaz a pr. fv. a kezdő és végpontban ugyanannyi.

Visszavezetés valós vonalintegrálra és felületi integrálra

Az integrál kifejezhető vonalintegrállal. Ha ugyanis $f = u + iv$, akkor az $f = (u, v)$ vektormezőnek olyan differenciálforma szerinti integrálja a komplex pályamenti integrál, mely az $f = (u, v)$ vektor és a $dz = (dx, dy)$ infinitezimális elmozdulásvektor komplex szorzásaként jön létre:

$$\int_G f(z) dz = \int_G u dx - v dy + i \int_G u dy + v dx$$

Ebben a felírásban az $(u, -v)$ és (v, u) olyan segédvektormezők, melyek vonalintegráljai adják meg a komplex integrál valós és képzetes részét. Tehát az integrált a

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

segédvektormezők síkbeli **vonalintegráljai**

$$\int_G \mathbf{P} \, d\mathbf{r} + i \int_G \mathbf{Q} \, d\mathbf{r}$$

vagy

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} -v \\ -u \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$$

segédvektormezők síkbeli **felületi integráljai**

$$\int_F \mathbf{P}' \, d\mathbf{f} + i \int_F \mathbf{Q}' \, d\mathbf{f}$$

szolgáltatják.

Itt érdemes feleleveníteni, hogy az $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ síkvektormező felületi integrálját a $(v_1, v_2)(df_1, df_2)$ "http://wiki.math.bme.hu/differencialforma" http://wiki.math.bme.hu integralasa adja. Itt az infinitezimális feluletelem $(df_1, df_2) = (dy, -dx)$.

$$\int_F \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \int_F v_1 dy - v_2 dx$$

A Newton-Leibniz-tétel bizonyítása. A vonalintegrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tétel (I. gradiens tétel) a következő: ha folytonosan differenciálható, az értelmezési tartományában haladó G görge végpontjai: a és b , akkor

$$\int_G \text{grad } \Phi \, d\mathbf{r} = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Ezt a segédvektormezőkre fogjuk alkalmazni.

$$\begin{aligned} \int_G f(z) dz &= \int_G u dx - v dy + i \int_G u dy + v dx = \\ &= \int_G u dx - v dy + i \int_G v dx + u dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= u + i v \\ f &= F' = \partial_x \Phi + i \partial_y (-\Phi) = u + i v \\ f &= F' = \partial_y (\Psi) + i \partial_x (\Psi) = u + i v \\ \text{grad } \Phi &= (u, -v) \\ \text{grad } \Psi &= (v, u) \end{aligned}$$

$$= \int_G u dx - v dy + i \int_G v dx + u dy = \Phi(b) - \Phi(a) + i(\Psi(b) - \Psi(a))$$

u, v folytonos differenciálhatósága sajnos csak egy későbbi tétel következménye, miszerint reguláris függvény analitikus. Addig a tételben ideiglenesen ki kell kötnünk, hogy f folytonos.

Tétel. Ha a D nyílt halmazon értelmezett f függvénynek van primitív függvénye, akkor f körintegrálja minden a D -ben haladó zárt görbére nulla:

$$\oint_G f = 0$$

További információhoz akkor jutunk, ha a többváltozós analízis cirkulációmentességi feltételeit vizsgáljuk. Ehhez a vissza kell vezetni a komplex integrált a vonalintegrálra.

Cirkulációmentesség

Gauss-tétel

Lássuk először Gauss-tétellel, hogyan következtethetünk a körintegrál eltűnésére.

Gauss-tétel ($\mathbf{R}^3$ -ra) Legyen $\mathbf{v}$ nyílt halmazon értelmezett C^1 -függvény, V mérhető, peremes térrész és legyen ennek pereme a ∂V kifelé irányított felület. Ha V a peremével együtt $\text{Dom}(\mathbf{v})$ -ben van, akkor

$$\oint_{\partial V} \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \int_V \text{div } \mathbf{v} \, dV$$

Megjegyzes. Az itt szereplő fogalmak közül néhányról beszélnünk kell.

Felület. Legyenek a $\varphi_i: D_i \rightarrow \mathbf{R}^3$ függvények folytonosan differenciálhatóak és injektívek $\text{int}(D_i)$ -n, melyek mérhető tartományok $\mathbf{R}^2$ -ben. Ha a képek egymásba nem nyúlók, azaz $\text{int}(\varphi_i(D_i)) \cap \text{int}(\varphi_j(D_j)) = \emptyset$, ha $i \neq j$, és a képek uniója összefüggő halmaz, akkor $\bigcup \text{Ran}(\varphi_i)$ -t elállítottuk paraméteres felületként.

Példaként említhetjük a kúp paraméterezését:

$$\mathbf{r}_1(\varphi, h) = \begin{cases} h \sin \vartheta \cos \varphi \\ h \sin \vartheta \sin \varphi \\ h \end{cases}, \text{ ha } \varphi \in [0, 2\pi] \text{ és } h \in [0, H]$$

$$\mathbf{r}_2(\varphi, h) = \begin{cases} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ H \end{cases}, \text{ ha } \varphi \in [0, 2\pi] \text{ és } r \in [0, R]$$

ahol H a kúp magassága, R az alapkör sugara, ϑ a félkúpszög (z a tengelye, O a csúcsa). Tehát itt a paramétertartományok $[0, 2\pi] \times [0, H]$ és $[0, 2\pi] \times [0, R]$.

C^1 -ség. Ez azért kell, mert a térfogati integrált a D paramétertartományon a

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int_{\mathbf{r}^{-1}(V)} \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v, w)) |J^{\mathbf{r}}(u, v, w)| \, du dv dw$$

képlettel számoljuk és ahhoz, hogy ez létezzen, ahhoz pl. az kell, hogy ne csak az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$ legyen folytonosan diff.-ható, de a divergencia is folytonos legyen.

Gauss-tétel ($\mathbf{R}^2$ -re) Legyen D mérhető peremes síkrész, melynek pereme, azaz a ∂D halmaz kifelé irányított síkbeli felület. Ha $\mathbf{v}$ nyílt halmazon értelmezett folytonosan $\mathbf{R}$ -differenciálható és $\operatorname{Dom}(\mathbf{v})$ tartalmazza D lezártját, akkor

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \, d\mathbf{f} = \int_D \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{A}$$

ahol $d\mathbf{f}$ kétdimenziós felületi integrált jelöl, $d\mathbf{A}$ pedig kétdimenziós tartományi integrált.

Így tehát a komplex vonalintegrál kiszámításához csak a $\mathbf{P}'$ és $\mathbf{Q}'$ felületi integrálját kell kiszámítanunk, amihez a Gauss-tételbeli divergenciákat kell kiszámítanunk:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{P}' &= -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{Q}' &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Ami, a C-R-egyenletek miatt igaz.

Innen

$$\int_{\partial D} f(z) \, dz = 0$$

Stokes-tétel

Nézzük meg Stokes-tétellel is a bizonyítást.

Stokes-tétel ($\mathbf{R}^3$ -ra) Legyen a nyílt halmazon értelmezett $\mathbf{v}$ vektorfüggvény folytonosan differenciálható, a $\operatorname{Dom}(\mathbf{v})$ -beli F felületen, aminek a ∂F pereme legyen szintén $\operatorname{Dom}(\mathbf{v})$ -beli és F -hez megfelelően irányított görbe. Ekkor

$$\oint_{\partial F} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$$

Megjegyzés. A térbeli cirkulációmentességre vonatkozó nevezetes tétel ezzel a tétellel kapcsolatos. Ebben az esetben, bár az egyszeres összefüggés nincs megkötve $\operatorname{Dom}(\mathbf{v})$ -re vonatkozólag, eljön a következményében:

Következmény. Ha az egyszeresen összefüggő U nyílt halmazon értelmezett $\mathbf{v}$ vektormező folytonosan differenciálható, akkor az alábbi három kijelentés ekvivalens egymással:

Gauss-tétel

1. $\text{rot } \mathbf{v}$ eltérő U -n,
2. minden U -ban haladó zárt görbén a $\mathbf{v}$ körintegrálja nulla,
3. létezik $\mathbf{v}$ -nek U -n potenciálja, azaz olyan $\phi : U \rightarrow \mathbf{R}$ függvény, melyre $\text{grad } \phi = \mathbf{v}$.

Itt az egyszerű összefüggés azért kell, mert ilyen esetben a zárt görbéhez található olyan felület, mely a tartományban halad és pereme a görbe.

Stokes-tétel ($\mathbf{R}^2$ -re) Legyen a D síkbeli tartomány határa a ∂D zárt görbe, megfelelően irányítva. Ha $\mathbf{v}$ folytonosan $\mathbf{R}$ -differenciálható egy nyílt halmazon, mely tartalmazza D lezártját, akkor

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_D \text{rot}(\mathbf{v}) \, dA$$

Ekkor csak a rotációt kell kiszámítanunk:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{P} &= \frac{\partial u}{\partial y} - \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \\ \text{rot } \mathbf{Q} &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Ami, a C-R-egyenletek miatt igaz.

Mindezekből tehát következik, hogy ha a D peremes síktartomány lezártján az f komplex függvény (értelmezett és) analitikus, akkor D peremén az f integrálja eltűnik. A következőben élcsítjük úgy a tételt, hogy elegendő legyen feltenni benne, hogy f egyszer komplexen deriválható, egyszeresen összefüggő nyílt halmazon értelmezett és a görbe egy benne haladó egyszeri zárt görbe.

Green-tétel

A síkbeli Stokes-tételt néha Green-tételnek is nevezik, ha az alábbi alakban van írva. Ez a következő. Legyen a D síkbeli tartomány határa a ∂D zárt görbe, megfelelően irányítva. Ha a (P, Q) síkbeli vektormező folytonosan $\mathbf{R}$ -differenciálható egy nyílt halmazon, mely tartalmazza D lezártját, akkor

$$\oint_{\partial D} P \, dx + Q \, dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

HF: Bizonyítsuk be a tételt síkbeli normáltartományra, azaz olyan D -re, melyre:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$$

ahol minden $x \in [a, b]$ -re $\psi(x) \leq \varphi(x)$. Itt ψ, φ folytonosan differenciálható.

Goursat-lemma, Cauchy-féle integráltétel

Goursat ennél is mélyebb eredményt talált:

Goursat-lemma. A T háromszöglapon reguláris f komplex függvény integrálja a háromszög határán nulla:

$$\oint_{\partial T} f = 0$$

Bizonyítás. A háromszöget osszuk fel 4 egybevágó háromszögre: $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4$. Ha jól irányítjuk a kis háromszögek határait, akkor

$$\int_{\Delta} f = \int_{\Delta_1} f + \int_{\Delta_2} f + \int_{\Delta_3} f + \int_{\Delta_4} f$$

Ezt felülbecsülhetjük a következővel:

$$\left| \int_{\Delta} f \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\Delta_i} f \right| \leq 4 \max_{i=1}^4 \left| \int_{\Delta_i} f \right| = 4 \left| \int_{\Delta^{(1)}} f \right|$$

most $\Delta^{(1)}$ -et bontjuk fel és folytatva a felosztást egy nullához tartó nagyságú háromszögekből álló egymásba skatulyázott $(\Delta^{(n)})$ háromszögsorozatot kapunk, mely egy ponthoz, a z_0 -hoz tart. A háromszögek kerülete $K/2^n$, ha K az eredeti háromszög kerülete. Erről a sorozatra továbbá:

$$\left| \int_{\Delta} f \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta^{(n)}} f \right|$$

igaz.

Most felhasználjuk a komplex differencialhatóságot. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra van olyan környezet U a z_0 -nak, és a háromszögsorozatnak olyan N indexe, melyre az n -edik tagok már a környezetben vannak és az alábbi formulában az $|\varepsilon(z)| < \varepsilon$:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0)$$

Ezt integrálva a háromszögre:

$$\left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) \right| = \left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0) dz \right| = \left| \int_{\Delta^{(n)}} \varepsilon(z)(z - z_0) dz \right| =$$

Itt az utolsó kifejezést az ívhossz integrállal felülbecsüljük:

$$\leq \int_{\Delta^{(n)}} |\varepsilon(z)| |z - z_0| |dz| < \varepsilon K^2 / 4^n$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért az integrál eltűnik.

Innen már könnyen adódik a komplex analízis főtétele, melyet először Cauchy modott ki ugyan csak folytonosan differenciálható komplex függvényre, de Goursat ezt megfejeltte a gyengített feltételével:

F?tétel. Ha a D egyszeresen összefügg? tartományon reguláris az f komplex függvény, akkor a tartományban minden zárt G egyszeru görbén a függvény integrálja nulla:

$$\oint_G f = 0$$

Nehany topologiai fogalom

Egy D nyílt halmaz $\mathbb{C}$ -ben egyszeresen összefügg?, ha benne minden zárt görbe *pontra deformálható*. Ez utóbbi a következőt jelenti. Azt mondjuk, hogy a $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ zárt görbe a $z_0 \in D$ -beli pontra deformálható a D tartományban, ha létezik olyan $\gamma: [0, 1] \rightarrow D^{[a, b]}$ görbe értéku függvény, melyre $\gamma(1) = \gamma(0) = z_0$ konstans görbe és az $[a, b]$ és $D^{[a, b]}$ terek között ható folytonos leképezés a szupremumnorma szerint.

Csillagszerű egy H halmaz $\mathbb{C}$ -ben, ha van olyan H -beli pont c pont, hogy bármely H -beli z pontra a $[cz]$ szakasz H -ban van.

Pelda. Egy csillagszerű tartomány egyszeresen összefügg?, mert a csillagpontra való $[0, 1]$ -beli arányszámmal parameterezett középpontos kicsinyítés kepei alkotta parameteres görbesereg ilyen.