

Tartalomjegyzék

- 1 Komplex hatványsorok
 - ♦ 1.1 Hatványsorok összegfüggvényének folytonossága és differenciálhatósága
- 2 Elemi függvények
 - ♦ 2.1 Hatványfüggvények
 - ♦ 2.2 Exponenciális függvény
 - ♦ 2.3 Komplex logaritmus és a reciproknak integrálja
 - ♦ 2.4 Trigonometrikus függvények
 - ♦ 2.5 Hiperbolikus függvények
- 3 Taylor-sor
- 4 Egész kitevű hatványsorok, Laurent-sor
 - ♦ 4.1 Konvergenciataromány
 - ♦ 4.2 Reguláris- és f?rész
- 5 Laurent-sorfejtés

Komplex hatványsorok

Definíció ? *Hatványsor ?* Legyen (a_n) komplex számsorozat és $z_0 \in \mathbb{C}$. Ekkor az $\sum (a_n (z - z_0)^n)$ függvényt hatványsornak nevezzük és összegét, az

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

hozzárendelési utasítással értelmezett, a $\{z \mid \sum (a_n (z - z_0)^n) \text{ konvergál} \}$ halmazon értelmezett függvényt a hatványsor **összegének** nevezzük. Középpontja z_0 , együtthatósorozata (a_n) .

A továbbiakban csak a $\sum (a_n z^n)$ alakú, azaz a 0 körüli hatványsorokkal foglalkozunk (ezzel nem csorbítjuk az általánosságot, mert eltolással megkaphatjuk a többi is).

Tétel ? *Cauchy-Hadamard-tétel ?* Ha (a_n) komplex számsorozat, $c = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ és

$$R = \begin{cases} 0, & \text{ha } c = +\infty \\ +\infty, & \text{ha } c = 0 \\ \frac{1}{c}, & \text{ha } 0 < c < +\infty \end{cases}$$

akkor $\sum (a_n z^n)$ abszolút konvergens a $B_R(0)$ gömbön és divergens a $B_{1/R}(0)$ gömbön.

A tétel minden részletre kiterjed? bizonyítását nem végezzük el, csak utalunk rá, hogy nyilvánvaló, hogy a Cauchy-féle gyökkritériumot kell benne használni. A tételbeli R sugarat a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük. R -et másként is kiszámíthatjuk. Ha azt tudjuk, a hányadoskritérium alapján, hogy

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

akkor létezik és ezzel egyenlő az n -edik gyökök sorozata is:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

ahol az idézőjel azt jelzi, hogy a konvergenciasugár lehet végtelen vagy 0 is.

7. Feladat. Mi az alábbi hatványsorok konvergenciaköre és -sugara?

1. $\sum (2i)^n n^3 (z - i)^n$
2. $\sum \left(\arcsin \left(\frac{1}{n} \right) (z + 1 + i)^n \right)$
3. $\sum \left(\frac{in^{2008}}{n!} z^n \right)$

Analitikusnak nevezünk egy f komplex függvényt, a z_0 pontban, ha van olyan R sugarú környezet és $\sum (a_n(z-z_0)^n)$ hatványsor, hogy minden $z \in B(z_0, R)$ -ra f értelmezett, $\sum (a_n(z-z_0)^n)$ konvergens és

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Ezt úgy jelöljük, hogy $f \in C(z_0)$.

8. Feladat

$$1. \quad \sum (a_n(z-2))$$

Van-e olyan (0) hatványsor, mely konvergál a 0-ban, de divergál a 3-ban. Konvergál 2-ben, de divergál az 2,000001-ben?

2. Igazoljuk, hogy az alábbi függvény analitikus a nullában. Mi a konvergenciaköre?

$$f(z) = \frac{1}{4 + z^2}$$

Hatványsorok összegfüggvényének folytonossága és differenciálhatósága

Tétel ? Ha (a_n) komplex számsorozat, akkor az $\sum (a_n z^n)$ hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciakör belsejében. Sőt, reguláris is ott.

Emlékeztetünk arra, hogy egy függvény reguláris egy pontban, ha a pont egy környezetében mindenütt értelmezett és komplex deriválható. A tétel szerint tehát analitikus függvény reguláris. A döbbenetes azonban, hogymint később kiderül: reguláris függvény analitikus: $f \in C(z_0)$ akkor és csak akkor, ha $f \in \text{Reg}(z_0)$.

Bizonyítás. Legyen z a konvergenciakör egy belső pontja és Δz olyan, hogy még $z + \Delta z$ is a konvergenciakör belsejébe esik. Ekkor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + \Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ((z + \Delta z)^n - z^n) =$$

mert mindkét sor konvergens, ekkor algebrai azonosságokkal:

$$= \Delta z \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z^k z^{n-1-k}$$

vagy ha tetszik nemnulla Δz -vel:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + \Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\Delta z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z^k z^{n-1-k}$$

a jobb oldalon álló sor konvergenciáját a gyökkritériummal láthatjuk be:

$$\left| a_n \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z^k z^{n-1-k} \right| \leq |a_n| \cdot n r^n$$

ahol r olyan pozitív szám, hogy $|z + \Delta z| < r < R$ (ez utóbbi a hatványsor konvergenciasugára). És

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot n r^n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot 1 \cdot r \leq \frac{1}{R} r < 1$$

Így azt kaptuk, hogy minden olyan Δz -re, melyre $|z + \Delta z| < r$, teljesül és $|\Delta z| < \frac{r}{1 + \sum_n |a_n| \ln r^n}$:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + \Delta z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq |\Delta z| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n r^n < \varepsilon.$$

Hosszadalmasabb számolásokkal, de lényegében ugyanígy kimutatható, hogy a hatványsor összegfüggvénye komplex differenciálható is a konvergenciakör belsejében és deriváltja a formális tagonkénti deriválással kapott sor összegfüggvényével egyenlő, tehát:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$$

Elemi függvények

Hatványfüggvények

A

$$w = z^n$$

típusú függvények komplex hatványfüggvények. $n \in \mathbb{Z}$ esetén, komplex deriváltjuk kiszámítható, $n \neq -1$ esetben komplex primitív függvényük is van a következő értelemben:

Mivel

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

ezért $n \neq -1$ esetén az az $F(z)$ függvény, melyre $F'(z) = z^n$ nem más, mint

$$F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C$$

ahol C komplex konstans. $n \neq -1$ -re nincs primitív függvénye, mert a logaritmus nem egyértékű a komplex számok között.

Komplex vonalintegrál értelmezhető a $G: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény, mint görbe esetén azzal a különlegességgel, hogy a szorzás a komplex szorzás:

$$\int_G f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i) \cdot \Delta z_i$$

Feltéve persze, hogy létezik és véges. Itt z_i mindig a G görbe valamely pontját jelöli, amit az $[a,b]$ egy felosztásának osztópontjainak G általi képeiből kapunk.

Ekkor fennáll a komplex Newton-Leibniz-formula. Ha a G görbe olyan nyílt halmazban halad, melyben az f -nek van primitív függvénye (egyértékű függvénye!) és f komplex integrálható, akkor z_1 és z_2 a végpontok esetén (a és b képe), a komplex integrál kiszámítható így:

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_G f(z) dz$$

Ha a görbe belép az f értelmezési tartományának olyan részére, melyben a függvénynek nincs egyértelmű primitív függvénye, akkor az integrál értéke függhet a G úttól.

1. Feladat. Legyen G a 3 középpontú, 1 sugarú kör felső félköre (pozitív irányítással). Számítsuk ki a

$$\int_G 3z^2 + 1 dz$$

integrált.

2. Feladat. Legyen G az origó körüli 2 sugarú kör vonal. Mennyi az

$$\text{a) } \int_G \frac{1}{z^2} dz \quad \text{és a b) } \int_G \frac{z+1}{z} dz$$

integrál.

A hatványfüggvények inverzei szintén nem egyértékű függvények.

Exponenciális függvény

$$e^z =_{\text{def}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Ebből kiderül az exponenciális függvény sok tulajdonsága. Például, ha $z = x + iy$, akkor

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Ebből rögtön következik, hogy komplex exponenciális függvény periodikus, periódusa a $p = 2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot e^0 \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z (1 + 0i)$$

3. Feladat. Oldjuk meg az

$$e^z = 1 + i$$

egyenletet!

Írjuk át $1+i$ -t exponenciális alakba:

$$1 + i = e^{\ln \sqrt{2}} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}}$$

így

$$z = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} + 2\pi i$$

4. Feladat. Oldjuk meg az

$$e^{iz} + ie^{-4iz} = 0$$

egyenletet!

Komplex logaritmus és a reciprok integrálja

Tekintsük a

$$w = e^z$$

hozzárendelést! Ha w -t exponenciális alakban írjuk, megfeleltethetjük egymásnak a z algebrai alakját w trigonometrikus alakjával:

$$w = r e^{i\varphi} = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

azaz

$$r = e^x \text{ és } \varphi = y$$

Ebből is látható, hogy a fordított leképezés végtelen sok értékű, hiszen ha $y_1 = 2 + y$, akkor $w(x+iy) = w(x+iy_1)$. Ekkor a Riemann-felület egy végtelen sok Riemann-levélből áll.

Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

$$\int_{G_1} \frac{1}{z} dx$$

$$\int_{G_2} \frac{1}{z} dx$$

ahol G_1 az egységkör a $+$ irányban i -től $-i$ -ig, G_2 az egységkör a $-$ irányban i -től $-i$ -ig.

$$\int_{i, (G_1)}^{-i} \frac{1}{z} dz = [\text{Log}(z)]_i^{-i} = \text{Log}(e^{i\frac{3}{2}\pi}) - \text{Log}(e^{i\frac{1}{2}\pi}) = i\pi$$

ahol Log a logaritmus főrésze, hisz a görbe a egy Riemann-levélben marad, míg

$$\int_{i, (G_2)}^{-i} \frac{1}{z} dz = [\text{Log}(z)]_i^{-i} = \text{Log}(e^{-i\frac{1}{2}\pi}) - \text{Log}(e^{i\frac{1}{2}\pi}) = -i\pi$$

mivel itt áthalad a görbe a következő Riemann-levélre.

Más számítással:

$$\int_{i, (G_1)}^{-i} \frac{1}{z} dz = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{z(t)} \cdot \frac{dz(t)}{dt} dt = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-it} i e^{it} dt = [it]_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

Trigonometrikus függvények

$$\sin z =_{\text{def}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z =_{\text{def}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Világos, hogy valós φ -re:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

A hiperbolikus függvényekhez hasonlóan a trigonometrikus függvények is elárthatók a komplex exponenciális segítségével:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

5. Feladat. Igazoljuk, hogy fennáll

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

6. Feladat. Oldjuk meg az

$$\sin 4z = 0$$

egyenletet!

Hiperbolikus függvények

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

7. Feladat. Határozzuk meg az $w = \operatorname{sh}(iz)$ függvény valós és képzetes részét!

Mo.

$$\operatorname{sh} iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

8. Feladat. G az egységkör. Számítsuk ki

$$\int_{(G)} \frac{e^z}{z} dz$$

$$\int_{(G)} \frac{\sin(z)}{z^4} dz$$

Mo.

$$\int_{(G)} \left(\frac{1}{z} + 1 + \frac{1}{2}z + \dots \right) dz = 2\pi i$$

$$\int_{(G)} \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4!}z + \dots \right) dz = -\pi i$$

Taylor-sor

A Cauchy-féle integrálformula következménye a következő tétel, mely a komplex differenciálelmélet egyik megjellegzetesebb eredménye:

Tétel. Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ függvény az értelmezési tartománya egy z_0 pontjában és ennek egy nyílt környezetében komplex differenciálható (azaz z_0 -ban *reguláris*), akkor f a z_0 pont egy $V = B(z_0)$ környezetén mindenhol végtelenszer differenciálható, V minden pontjában az f z_0 -beli Taylor-sora konvergens és ennek határfüggvénye V -n előállítja f -et:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

(azaz f *analitikus* z_0 -ban).

A tétel tehát azt mondja ki, hogy "http://wiki.math.bme.hu/reguláris függvény analitikus" http://wiki.math.bme.hu.

Megjegyezzük, hogy 1. mint minden nemnegatív egész hatványokat tartalmazó hatványsor, a Taylor-sor is egy körlap belsején abszolút konvergens, mely körlap sugara a konvergenciasugára, mely

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ahol a sor a $\sum a_n (z - z_0)^n$, a körlap középpontja z_0 , és ahol a reciprok kivételesen úgy értendő, hogy $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$.

2. A leggyakrabban használt Taylor-sorok a következők:

$$\begin{aligned} |z| < 1 - \text{re} : \quad \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ |z| < \infty - \text{re} : \quad e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \\ |z| < \infty - \text{re} : \quad \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ |z| < \infty - \text{re} : \quad \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\ |z| < \infty - \text{re} : \quad \text{sh}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ |z| < \infty - \text{re} : \quad \text{ch}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \end{aligned}$$

$$|z| < 1 - \operatorname{Re} z : \quad \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

természetesen az utolsónál a $z=1$ pont 1 sugarú nyílt környezetében értelmezett logaritmusról van szó.

3. Mint minden hatványsor ez is egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez, így tagonként deriválható és integrálható.

Egész kitevű? hatványsorok, Laurent-sor

Definíció. Ha adott a számra és $(c_n)_n$ z komplex számok komplex számokra a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n(z-a)^n)$$

függvénysort egész kitevű? hatványsornak, vagy Laurent-sornak nevezzük. Egy ilyen sor összegfüggvénye:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

Ugyanúgy, ahogy minden nemnegatív kitevű? hatványsor egyenl? a saját Taylor-sorával, így az ilyen sorokat egyszer?en csak Laurent-sornak hívjuk, függetlenül attól, hogy a Laurent-sor együtthatóit egy függvény értékeib?l számoljuk ki.

Ahogy a Taylor-sorfejtésben nagyon hasznos a mértani sor összegképlete (és konvergenciafeltétele), úgy ez a Laurent-soroknál is jól alkalmazható:

Példa. Mely pontok körül fejthet? egész kötevű? hatványsorba a

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

függvény és mik a konvergenciatartományok? *Megoldás.*

1) $z \neq 0$ -ra reguláris, így minden $z_0 \neq 0$ -ra Taylor-sorba fejthet? legalább is a z_0 egy olyan környezetében, mely a 0-t mint szingularitást nem tartalmazza (hisz tudjuk: hatványsor konvergenciatartománya körlap). Ez a sor:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_0 + z_0} &= \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{z - z_0 + 1} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 - (-1)(z - z_0)} = \\ &= \frac{1}{z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

A sugara 1, hisz $|(-1)||z - z_0| < 1$ kell, ami ugyanaz, mint $|z - z_0| < 1$. Persze, ha $|z_0| < 1$, akkor a sugár, maga a $|z_0|$, hisz a 0-t nem állítja el? a sor.

2) $z_0 \neq 0$ -ra a Laurent-sora. Most a $z - z_0$ -nak a mértani sorrá alakítás után a nevezőbe kell kerülnie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_0 + z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{-z_0}{z - z_0}} = \\ &= \frac{1}{z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z_0^n}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{-\infty} (-1)^{-n} z_0^{-n} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

Ennek a sorfejtésnek akkor van jelentősége, amikor olyan pont körüli sorral akarunk egy z számot előállítani, melynek minden z -t tartalmazó gömbi környezete tartalmazza a 0 -t is.

Konvergenciaköre a

$$|z - z_0| > |z_0|$$

egyenlőtlenségnek eleget téve z -k.

3) $z = 0$ -ban is van Laurent-sora, és pedig önmaga:

$$f(z) = \dots + 0 + \frac{1}{z} + 0 + \dots$$

Ennek a sugarai $R_+ = 0$, mert a $(\dots, 0, 0, 1)$ sorozat n -edik gyökeinek limszupja 0 , és $R_- = +\infty$, mert a $(0, 0, 0, 0, \dots)$ sorozat n -edik gyökeinek limszupja 0 és ∞ . (Ez egyben a 0 körüli Laurent-sor, melynek csak reguláris része van.)

Konvergenciatartomány

Laurent-sornál a konvergenciatartomány egy körgyűrű, melynek sugarait az együtthatókból a Cauchy--Hadamard-tételhez hasonló módon számolható, és pedig:

$$\begin{aligned} R_+ &= \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \\ R_- &= \limsup_{n \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \end{aligned}$$

Ez a kijelentés könnyen igazolható a Cauchy-féle gyökkritériummal, sőt a Cauchy--Hadamard-tétel bizonyítását felidézve szinte magától értetődik.

Reguláris- és főrész

A Laurent-sor

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

részét a sor **főrésze**nek, a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

részt a sor **reguláris** részének nevezzük.

Laurent-sorfejtés

Tétel. -- A Laurent-sor tétele -- Ha az $f: \mathbb{C} \supset \rightarrow \mathbb{C}$ és $a \in \mathbb{C}$ szám és $0 < r < R < +\infty$ olyan sugarak, hogy f az

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$$

nyílt körgyűrűben reguláris, akkor egyértelműen léteznek olyan $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ komplex számok, és pedig tetszőleges a -t haladó az a -t egyszer pozitív irányban körbehurkoló G görbére:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{Z}$$

hogy a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n (z - a)^n)$$

függvénysor konvergens T -ben és minden $z \in T$ számra:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$$

Bizonyítás. f -et most nem tudjuk előállítani a Cauchy-integrálformulával, mint a Taylor-sor esetén, mert az a pontban esetleg a függvény nem reguláris. De előállíthatjuk két hasonló formula különbségeként.

Rögzítsük egy tetszőlegesen választott $z \in T$ -t. Legyenek k_1 és k_2 két a középpontú, T -ben haladó, pozitívan irányított kör, úgy, hogy z a k_1 és k_2 körök közötti nyílt tartományba essen. Ezekből a körökből és az őket elválasztó gyűrűt sugárirányban befelé átmetsző s szakaszból elkészítünk egy olyan zárt görbét, melyre már alkalmazható az integrálformula. Tekintsük úgy, hogy k_1 kezdő és végpontja az s kezdőpontja, k_2 kezdő és végpontja pedig az s végpontja. Legyen

$$\Gamma = k_1 \cup s \cup (-k_2) \cup (-s)$$

itt $(-s)$ az s -sel ellenkező irányítású szakaszt jelzi. Ekkor Γ a z -t egy reguláris tartományban hurkolja egyszer, pozitívan körbe, így a Cauchy-integrálformulával:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z)} dw$$

Note, ebben az integrálban az s íven kétszer oda-vissza végezzük el az integrálást, így az erre vett integrál eltűnik. Másrészt a $(-k_2)$ -n vett integrál ellenkezője a k_2 -vettének, így végülis:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{k_1} \frac{f(w)}{(w-z)} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{k_2} \frac{f(w)}{(w-z)} dw$$

Hangsúlyozzuk, hogy z és a most konstansok, így a

$$w \mapsto \frac{1}{w-z}$$

az értelmezési tartományán analitikus függvény. Ennek -- szikásos módon a mértani sor összegére vonatkozó képlet segítségével -- elvégezhetjük az a középpontú, valamilyen körön belüli hatványsorba fejtését.

Természetesen a $|w-a| < |z-a|$ feltételt meg kell követelnünk, hiszen hatványsor konvergenciakörében nem lehet benne a z szakadási pont. Tegyük fel tehát, hogy $|w-a| < |z-a|$. Ekkor:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a) + (a-z)} = \frac{1}{a-z} \cdot \frac{1}{\frac{w-a}{a-z} + 1} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-a}{z-a}}$$

Ezzel megvan a sorfejtés minden együtthatója, ugyanis $q = \frac{w-a}{z-a}$ -ra kell alkalmazni a mértani sor formuláját:

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^n} \cdot (w-a)^n$$

1) Világos, hogy ezt a sorfejtést csak a k_2 -re vonatkozó integrálban használhatjuk fel, mert ott lesz a $q < 1$ (ill. a w mindig közelebb a -hoz mint z -hez). Ezt az integrált tehát:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{k_2} \frac{f(w)}{(w-z)} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{k_2} f(w) \frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^n} \cdot (w-a)^n dw =$$

az integrál felcserélhet? a szummával és a w -től független tagok kihozhatók az integrál elé, ezért

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{k_2} f(w) \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \cdot (w-a)^n dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \oint_{k_2} f(w) \cdot (w-a)^n dw$$

Ekkor egy konvergens, negatív kitevőjű hatványsort kaptunk, melynek csak f része van, de érdekes módon nem a középponttal és w -re, hanem a középponttal és z -ra. Ez pont a kívánt sorfejtés, melyet érdemes átindexelni úgy, hogy a szummázás -1 -től induljon és $-$ -ig menjen:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{k_2} \frac{f(w)}{(w-z)} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\oint_{k_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n$$

Már csak azt kell megmagyaráznunk, hogy a k_2 helyére most már minden olyan G görbére felírható, mely az a -t pozitívan öleli körbe egyszer és a regularitási tartományban halad. Valóban, a képletbeli integrál már független az $1/(w-z)$ sorfejtési szituációjától és minden olyan G görbére átranzformálható melyek

folytonosan átranzformálható k_2 -be. Ez a T körgy?r? összes a tételi állításban megadott görbéjére áll.

2) Most már az el?z? számolásból sejthet?, hogy a Laurent-sor reguláris része akkor jön ki, ha az $1/(w-z)$ reciprokfüggvényt a az a körül nem pozitív, hanem negatív kitev?j? hatványsorba, fejtjük -- mint az els? példában. Ezt a $|w-a| > |z-a|$ feltétellel tehetjük csak meg, hisz ilyen sor konvergenciatartománya körgy?r? és a z szinguláris pontot nem tartalmazhatja:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a) + (a-z)} = \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}}$$

Ez a sor valóban akkor konvergens, ha $|w-a| > |z-a|$. Ezzel az el?z? pont számolását elvégezve az $f(z)$ -t el?állító Laurent-sor reguláris részét kapjuk. QED

Példa. Adjuk meg az

$$f(z) = \frac{z^2}{z+2i}$$

függvény azon 0 körüli Laurent-sorát, mely el?állítja az 1-et! Azt is adjuk meg, mely a -3-t állítja el?!

Megoldás. $-2i$ szinguláris hely. Ha $a=0$, akkor a $z=1$ -et a 0 körüli Taylor-sor állítja el?, mert $|0-1| < |0 - (-2i)|$. Persze ezt is a m.s.-ral adjuk meg:

$$f(z) = \frac{z^2}{z+2i} = z^2 \frac{1}{2i} \frac{1}{\frac{z}{2i} + 1} = \frac{z^2}{2i} \frac{1}{1 - \frac{-iz}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{2^{n+1}} z^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^{n-3}}{2^{n-1}} z^n$$