Matematika A3a 2009

Tartalomjegyzék

- 1 Görbe
  - 1.1 Implicit megadású görbe
    - 1.1.1 Síkgörbe
    - 1.1.2 Térgörbe
  - 1.2 Explicit megadású görbe, kisér? triéder
  - 1.3 Ívhossz
- 2 Felületek
- 3 Házi feladatok

Görbe

A $G \quad \mathbf{R}^3$ (ill. $\mathbf{R}^2$) halmazt görbének nevezünk, ha van olyan I intervallum és $p{:}I \longrightarrow G$ függvény, mely ráképez G-re és differenciálható. Sokszor (pl. a komplex analízisben) megengedjük, hogy a p függvény bár folytonos legyen, de véges sok helyen ne legyen differenciálható (szakaszonként differenciálható görbe). A G görbe esetén a p függvényt paraméterezésnek is nevezzük és sokszor p helyett egy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ képlettel hivatkozunk rá. Itt a t a változó.

Implicit megadású görbe

Síkgörbe

Görbét megadhatunk a síkon egyenletével:

$$G = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$$

Paraméterezésre két lehet?ségünk van. Az implicitfüggvény tétel és valamely addhok módszer.

> Az implicitfüggvény tétel esetén alkalmas pont (a,b) közelében az egyik változót paraméternek választhatjuk, mondjuk $x = t$, a másikat t-vel való kifejezhet?ségét az implicitfüggvény tétel adja: $y = f(t)$ és F(t,f(t))=0, így p(t)=(t,y(t)).
> Az addhok módszer jellegzetes alakú F függvényekre ad alkalmas megoldásokat úgy, hogy létezzen $p{:}I \longrightarrow G$, $t \mapsto (x(t),y(t))$ ráképezés, melyre
> $F(x(t),y(t)) = 0$

minden t-re.

1. feladat Adjuk meg az $x^2 + 4y^2 = 2$ egyenlet? görbe néhány paraméterezését!

> *Mo.* "http://wiki.math.bme.huPolárkoordináták"http://wiki.math.bme.hu A $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ azonosságot kell módosítani alkalmas módon.
>
> $$x = \sqrt{2}\cos t$$
> $$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$$

"http://wiki.math.bme.huExplicit"http://wiki.math.bme.hu Egy másik szakaszonként értelmezett paraméterezéshez jutunk, ha az implicitfüggvény tétel szellemében kifejezzük az egyik változót:

$$\begin{aligned} x &= t \,, t \in [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}] \\ y &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{2-t^2} \end{aligned}$$

2. feladat Adjuk meg az $x^2 + y^2 = 4$ egyenlet? görbe ívhossz-paraméterezését!

Mo. Kör esetén a *t* polárkoordinátából úgy lesz *s* ívhossz, hogy beszorozzuk a kör sugarával: $s = 2t$. Ekkor

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\frac{s}{2} \\ y &= 2\sin\frac{s}{2} \end{aligned}$$

Térgörbe

Térben a görbét két egyenlettel adhatunk meg:

$$\Gamma = \{(x,y) \mid F(x,y,z) = 0,\ G(x,y,z) = 0\}$$

Ekkor is használható az implicitfüggény tétel, persze ezt csak kell? körültekintéssel lehet csak alkalmazni.

Például alkalmas (a,b,c) pont közelében az egyik változó, mondjuk az x tetsz?legesnek tekinthet? és a többi ezzel a tétel alapján kifejezhet?: $x = t$ és $y = f(t)$, $z = g(t)$.

3. feladat. Adjuk meg az

$$\begin{aligned} z &= \arcsin\frac{x}{2} \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

egyenletekkel megadott els? térnyolcadba es? görbe egy paraméterezését!

Célszer? az $x = 2\sin t$ helyettesítéssel próbálkozni. Ekkor $y = 2\cos t$ és $z = t$.

Explicit megadású görbe, kisér? triéder

Egy

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

differenciálható paraméterezés deriváltja a sztenderd (**i**,**j**,**k**) bázisban azonosítható a Jacobi-mátrixával:

$$[\mathrm{d}\mathbf{r}(t)] = \mathrm{J}^{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{r}}(t)$$

A derivált az érint? irányvektorával azonosítható, ha az nem nullvektor. Ha nullvektor, akkor a görbének aszerint a paraméterezés szerint nem létezik érint?je, de más paraméterezés szerint mg létezhet.

A derivált szintén $I \longrightarrow \mathbf{R}^3$ függvény, mely tovább deriválható, ha az $\mathbf{r}(t)$ maga kétszer deriválható volt, ...

A további vizsgálatok valójában nem szétválaszthatak a mechanikától. Az deriváltvektor egyben sebesség is, a második derivált egyben gyorsulás is. A második derivált érint?re mer?leges komponense a centripetális gyorsulás (kör középpontja felé mutató gyorsulás):

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ érint?vektor, a normálsík normálisa
$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$
$\mathbf{b} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ binormális vektor, a **simulósík** normálisa
$\mathbf{a}_{\mathrm{cp}} = \dfrac{\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^2}$ f?normális, a rektifikáló sík normálisa

A simulókör sugara a centripetális gyorsulásból adódik:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{R}$$
$$R = \frac{v^2}{a_{\mathrm{cp}}} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|^3}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}$$ a görbület a sugár reciproka: $G = \dfrac{1}{R}$

4. feladat. Adjuk meg az

$$[\mathbf{r}(t)] = \begin{bmatrix} t^2 - 1 \\ t \\ 3 - t \end{bmatrix}$$
$$(\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (3 - t)\mathbf{k})$$

görbe kísér? triéderét a t paraméterértékhez tartozó helyeken! Hol párhuzamos az érint? az x + 2y + 4z = 4 síkkal?

Mo.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

végül a f?normális:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4t \\ 4t \end{bmatrix}$$

Az érint? párhuzamosságának feltétele, hogy a sík normálvektorára $\mathbf{r}$(t) deriváltja mer?leges legyen

$$1 \cdot 2t + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 0, \quad t = 1$$

Ívhossz

Görbe ívhossza az ívhossz integrálok egy speciális típusa.

ívhossz: $$L = \int_G |\mathrm{d}\mathbf{r}|$$

f(**r**) pontonként számérték? függvény integrálja: $$I = \int_G f(\mathbf{r})\,|\mathrm{d}\mathbf{r}|$$

Kiszámítása (ha a G görbe egy paraméterezésének kezd? és végpontja t_1 és t_2)

$$L = \int_G |\mathrm{d}\mathbf{r}| = \int_{t=t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t$$

5. feladat Számítsuk ki a 3. feldatbeli görbe ívhosszát! Hol maximális a görbület?

Mo. (Paraméterezással) Paraméterezése:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \\ t \end{bmatrix} \quad \text{ahol } t \in [0, \pi/2], \qquad \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ -2\sin t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\int_{t=0}^{\pi/2} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{5\pi}{2}$$

(Szimmetriákkal) A d**r** elemi érint?vektor mindenhol 1 iránytangens? szögben hajlik az [xy] síkhoz, erre es? vetülete pedig mindig ugyanakkora. A ívhossz tehát egy derékszög? háromszög átfogója.

Ívhossz paraméterezésben a görbület az $|\mathbf{r}''(s)|$ mennyiség. t:0->2 , akkor s:0->10 , azaz t=s/5.

Felületek

6. Paraméterezzük az alábbi implicit megadású felületeket:

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$x^2 + y^2 = z$$
$$x^2 + 4y^2 = z$$

Mo.

$$\mathbf{r}(r,\varphi)=\begin{bmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}(r,\varphi)=\begin{bmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}(r,\varphi)=\begin{bmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ \frac{r}{2}\sin\varphi \\ r^2 \end{bmatrix}$$

7. Paraméterezzük a

$$\mathbf{r}(t)=\begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

görbe érint?i által kirajzolt felületet!

Mo.

$$\mathbf{r}_0(t)=\mathbf{r}(t)=\begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(t)=\dot{\mathbf{r}}(t)=\begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}(t,s)=\mathbf{r}_0(t)+s\mathbf{v}(t)=\begin{bmatrix} t+s \\ t^2+2ts \\ t^3+3t^2s \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

1. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i}+\frac{1+t}{t}\mathbf{j}+\frac{t}{t+1}\mathbf{k}$$

görbe azon pontjabeli érint?egyenesének egyenletrendszerét, mely a t=1 értékhez tartozik!

2. Mely pontokban párhuzamos a

$$\mathbf{r}(t)=t^5\mathbf{i}+t^4\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$$

görbe érint?je az x+2y+3z=0 síkkal?

3. Határozzuk meg a

$$\mathbf{r}(t)=\frac{4}{3}t^3\mathbf{i}+2t^2\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$$

görbe azon pontjait, melyekben az érint? 30?-os szöget zár be az x=y=z egyenessel!

4. Határozzuk meg a

$$\mathbf{r}(t)=e^t\cos t\mathbf{i}+e^t\sin t\mathbf{j}+e^t\mathbf{k}, \; t\in[0,2]$$

györbeszakasz ívhosszát!

5. Hol van az alábbi görbe görbületének és torziójának szél?értéke?

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$$

6. Paraméterezzük a z ill. az y tengely körül körbeforgatott $z = y^2$ parabola által kirajzolt felületet!

7. Paraméterezzük az

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

görbe érint?egyenesei által kirajzolt felületet!

8. Mely pontokban párhuzamosak ill. mer?legesek az

$$\mathbf{r}(u, v) = (u^2 + v^2)\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + \cos u \cos v\mathbf{k}$$

felület pontbeli "http://wiki.math.bme.hukoordinátavonalai"http://wiki.math.bme.hu (az ∂**r**/∂u és ∂**r**/∂v vektorok)?

9. Mely pontokban párhuzamos az xyz=1 egyenlet? felület érint?síkja az x+y+z=5 síkkal?