# Tartalomjegyzék



# Típusok és módszerek

1. Els?rend? közönséges nemlineáris --> szeparábilis (ill. homogén fokszámú) vagy egzaktá tehet?
2. Els?rend? lineáris --> hom. ált. + inh. part.
    1. Els?rend? lineáris homogén --> szeparábilis
    2. Els?rend? lineáris inhomogén --> állandók variálása
3. Másodrend? hiányos --> 3 eset (g(x) hiányzik, y hiányzik, y' hiányzik)
4. Másodrend? állandóegyütthatójú lineáris
    1. --> próbafüggvény
    2. --> Laplace
    3. egyenletredszert Laplace-szal

# Feladatok

## Egzaktra visszavezethet?

**1.** Oldjuk meg az

$$(x^2+y^2+x)+y'xy=0$$

egyenletet az y(1) = 1 kezdeti feltétel mellett!

*Mo.* Nem egzakt, nem homogén fokszámú.

$$\partial_y P = 2y \not\equiv y = \partial_x Q$$

Keressünk integráló szorzót!

$$R=\frac{\partial_y P-\partial_x Q}{Q}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x}$$ csak x-t?l függ?.

Ekkor

$$\mu(x)=e^{\int R(x)\,\mathrm{d}x}=e^{\ln x}=x$$

Valóban, ha

$$(x^3+xy^2+x^2)+y'x^2y=0$$

akkor

$$\partial_y(\mu P) = 2xy \equiv 2xy = \partial_x(\mu Q)$$

Keressünk potenciálfüggvényt! Az alábbi parciális differenciálegyenletet kell megoldanunk.

$$\partial_x F = x^3 + xy^2 + x^2, \quad \partial_y F = x^2 y$$

Mindkét egyenletet integráljuk aszerint a változó szerint, ami szerint a deriválás történik:

$$F(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 + C_1(y)$$
$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C_2(x)$$

Összehasonlítva:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$$

Valóban, ennek e megfelel. Az els? integrál:

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 = C$$

Speciálisan ebb?l kifejezhet? az (1,1)-en áthaladó megoldás:

$$6x^2y^2 + 3x^4 + 4x^3 = 13$$

és

$$y(x) = \frac{\sqrt{13 - 3x^4 - 4x^3}}{\sqrt{6}x}$$

## Els?rend? függvényegyütthatós inhomogén differenciálegyenletet

**2.** Oldjuk meg az alábbi els?rend? függvényegyütthatós inhomogén differenciálegyenletet!

$$\mathrm{sh}(x)y' + \mathrm{ch}(x)y = 1$$

*Mo.* I. A homogén egyenletet szeparálással:

$$\mathrm{sh}(x)y' + \mathrm{ch}(x)y = 0$$
$$\mathrm{sh}(x)y' = -\mathrm{ch}(x)y$$
$$\frac{1}{y}y' = -\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$$

$$\ln|y| = -\int \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$\ln|y| = -\ln|\mathrm{sh}(x)| + C$$
$$y = \frac{c}{\mathrm{sh}(x)}$$

II. Partikuláris megoldást keresünk az inhomogén egyenlet részére. A megoldást

$$y = \frac{c(x)}{\mathrm{sh}(x)}$$

alakban keressük.

$$y'(x) = \frac{c'(x)\,\mathrm{sh}(x) - c(x)\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)}$$

az egyenlet ekkor ilyen alakú:

$$c'(x)\,\mathrm{sh}(x) - c(x)\,\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(x)c(x) = \mathrm{sh}(x)$$
$$c'(x) = 1$$
$$c(x) = x$$

Tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y(x) = \frac{c+x}{\mathrm{sh}(x)}, \qquad c \in \mathbf{R}$$

Valóban,

$$\mathrm{sh}(x)\frac{\mathrm{sh}(x) - (c+x)\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} + \frac{c+x}{\mathrm{sh}(x)}\mathrm{ch}(x) = 1$$

## Állandó együtthatójú másodrend? lineáris próbafüggvénymódszerrel

Az állandó együtthatójú másodrend? lineáris differenciálegyenlet megoldása kvadratúra nélkül megkapható, ha az

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

alakban az f(x) perturbáló függvény (szabad tag) a következ? függvény:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\sin(\beta x) + P_2(x)\cos(\beta x))$$

Ekkor ugyanis a partikuláris megoldás kereshet? az

$$y(x) = x^k e^{\alpha x}(Q_1(x)\sin(\beta x) + Q_2(x)\cos(\beta x))$$

alakban, ahol k megmutatja, hogy az $\pm$ szám hányszoros gyöke a

$$\lambda^2 + a\lambda + b$$

karakterisztikus polinomnak és a Q-k olyan fokszámú meghatározandó polinomok, mint a P-közül a nagyobbik fokszámú.

**3.**

a) $y'' - 2y' + y = 1 + x$
b) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
c) $y'' + 4y = \cos 2x$

## Laplace-transzformáció

Legfontosabb képletek:

$$f(t) = e^{at} \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s-a}, \; f(t) = t^n \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}},$$
$$f(t) = e^{at}g(t) \quad \rightarrow \quad F(s) = G(s-a)$$
$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), \; \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

**4.**

a) $y' + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 1$
b)
$$\dot{x} = 3x + y, \quad x(0) = 1$$
$$\dot{y} = 3y + x,, \quad y(0) = -1$$