

Ívhosszparaméter és görbület

A görbület adott pontban független a koordinátarendszer választásától. Ezt például az is mutatja, hogy egy általános paraméterezésben felírt értékén

$$G(t) = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

túl a koordinátarendszerfüggetlen ívhosszparaméterezésben is kifejezhető a nagysága:

$$G(s) = |\mathbf{r}''(s)|$$

(0. Feladat Térjünk át az alábbi görbénél ívhosszparaméterezésre!

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \\ \cos 2t \end{bmatrix} \text{ ahol } t \in [0, \pi/2]$$

Mo.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} -3 \cos^2 t \sin t \\ 3 \sin^2 t \cos t \\ -2 \sin 2t \end{bmatrix}$$

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)|^2 = \sin^2 t \cos^2 t (9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t + 4)$$

$$s(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{13}}{2} |\sin 2t'| dt' = \frac{\sqrt{13}}{4} (\cos(2t) - 1)$$

$$t(s) = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{4}{13}s + 1\right)$$

$$\mathbf{r}(s) = \begin{bmatrix} \cos^3 \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{4}{13}s + 1\right) \\ \sin^3 \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{4}{13}s + 1\right) \\ \cos 2 \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{4}{13}s + 1\right) \end{bmatrix} \text{ ahol } s \in \left[0, \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{4\pi}{26} + 1\right)\right]$$

1. Feladat Térjünk át az alábbi görbénél ívhosszparaméterezésre és számítsuk ki a görbületét!

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \\ t^2 \end{bmatrix} \text{ ahol } t \in [0, \pi/2]$$

Mo.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} -2 \sin(t)t \\ 2 \cos(t)t \\ 2t \end{bmatrix}, \quad (|\dot{\mathbf{r}}(t)|)^2 = 8t^2$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{8t'} dt' = \frac{\sqrt{8}}{2} t^2 \quad t(s) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{8}}} \sqrt{s}$$

$$\mathbf{r}(s) = \begin{bmatrix} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s \\ \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}'(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}''(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} s \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} s \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Feladat

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ bt \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a görbesereg egy-egy görbéjének görbületét a b paraméter függvényében. Térjünk át ívhossz paraméterezésre!

Kísér? triéder

3. Feladat A t paraméter mely értékére párhuzamos az

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^t \\ t \end{bmatrix}$$

görbe simulósíkja az

$$5 - x = 1 - y = -2z$$

egyenlet? egyenessel?

Mo.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} 4e^{2t} \\ 2e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^t \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4e^{2t} \\ 2e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{2t} \\ 4e^{2t} \\ -4e^{3t} \end{bmatrix}$$

a simulósík normálvektora. Ez merőleges a $(1,1,1/2) \rightarrow (2,2,1)$ -re

$$\begin{aligned} -4e^{2t} + 8e^{2t} - 4e^{3t} &= 0 \\ 1 - e^t &= 0, t = 0 \end{aligned}$$

4. Feladat Határozzuk meg az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad 2x + y = 3$$

egyenletekkel megadott implicit megadású görbe kísér? triéderét a P=(1,1,1) pontban!

Mo.

$$x^2 + (3 - 2x)^2 + z^2 = 3$$

$$z^2 = 3 - x^2 - (3 - 2x)^2$$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 3 - 2t \\ \sqrt{3 - x^2 - (3 - 2x)^2} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{-4x + 6}{\sqrt{3 - x^2 - (3 - 2x)^2}} \end{bmatrix} \Big|_{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$2zz' = -2x + 2(3 - 2x) = -4x + 6, \quad z' = \frac{-4x + 6}{2z} \Big|_{P} = 1$$

Felületek

5. Feladat. Paraméterezzük a z ill. az y tengely körül körforgatott $z = y^2$ parabola által kirajzolt felületet!

Mo. a) $x^2 + y^2 = z$

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} \sqrt{z} \cos u \\ \sqrt{z} \sin u \\ z \end{bmatrix}$$

b) $x^2 + z^2 = y^4$

$$\mathbf{r}(u, y) = \begin{bmatrix} y^2 \cos u \\ y \\ y^2 \sin u \end{bmatrix}$$

6. Feladat Mely pontokban párhuzamosak ill. merőlegesek az

$$\mathbf{r}(u, v) = (u^2 + v^2)\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + \cos u \cos v\mathbf{k}$$

felület pontbeli "<http://wiki.math.bme.hukoordinátavonalai>" "<http://wiki.math.bme.hu> (az $\partial\mathbf{r}/\partial u$ és $\partial\mathbf{r}/\partial v$ vektorok)?

7. Feladat. Mely pontokban párhuzamos az $xyz=1$ egyenlet? felület érintő síkja az $x+y+z=5$ síkkal?