Görbementi integrál

A **v** = **v**(**r**) vektormez? integrálja az **r** = **r**(*t*), $t=t_1...t_2$ görbe mentén a következ? szám, ha létezik:

$$\int_G \mathbf{v}\ \mathrm{d}r = \lim_{|\Delta\mathbf{r}|\to 0,\ N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{v}(\mathbf{r}_i)\cdot\Delta\mathbf{r}_i$$

ahol az $\mathbf{r}_i$ pontokat a görbén "http://wiki.math.bme.hulibasorban"http://wiki.math.bme.hu vettük föl. A vonalintegrál kiszámítását a következ?képpen tehetjük:

$$\int_{G,\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{v}\ \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t$$

ahol $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$. Olyan kiszámítási mód is van, melyben nem lesz szükségünk a paraméterezésre:

$$\int_G \mathbf{v}\ \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_G \mathbf{v}_e\ |\mathrm{d}\mathbf{r}|$$

ahol $\mathbf{v}_e$ a vektormez?nek a görbe érint?je irányú komponense, az integrál pedig a vektormez? ívhossz szerinti integrálja, az az integrandusban az ívhossz kiszámító képletekben egy skalárszorzót, a $\mathbf{v}_e$-t is szerepeltetünk.

$$\int_G \mathbf{v}\ \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_G |\mathbf{v}|\ |\mathrm{d}\mathbf{r}_e|$$

Itt a vektor mez? irányú elmozdulásokat vesszük csak figyelembe.

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi vektormez?nek az A=(1,-2,3), B=(2,1,4) végpontú egyenes szakaszra vonatkozó integrálját!

$$\mathbf{v}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$$

2. Feladat. Ugyannennek a vektormez?nek az

$$\mathbf{r}(t) = \sin^2 t\,\mathbf{i} + \sin(2t)\,\mathbf{j} + \cos^2 t\mathbf{k},\ \ t\in[0,\pi]$$

görbére vett integrálját!

Mo.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} 2\sin t\cos t \\ 2\cos(2t) \\ -2\cos t\sin t \end{bmatrix},\ \int_G \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{r} =$$

$$= \int_0^\pi \sin^2(2t) + \cos^2 t \sin(2t) + 2\cos(2t) - \sin^2 t \sin(2t) - \sin^2(2t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\pi \frac{1}{2}\cos(4t) + 2\cos(2t)\,\mathrm{d}t = 0$$

3. Feladat. Számítsuk ki a **v** = **k** × **r** függvénynek az R sugarú, [x,y] síkbeli origó középpontú körre vonatkozó integrálját!

4. Feladat. Számítsuk ki a **v** = **k** × **r** / |**k** × **r**|^2 függvénynek az R sugarú, [x,y] síkbeli origó közép vetület?, M menetemelkedés? integrálját!

Felületi integrál

$$\int\limits_F \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{F} = \int\limits_{F_{u,v}} \mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) \left(\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\right)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\int\limits_F \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{F} = \int\limits_F |\mathbf{v_n}|\,|\mathrm{d}\mathbf{F}|$$

felszín integrállal a normális irányú komponensb?l.

5. Feladat. Számítsuk ki a **v** vektormez?nek az **r** felületre vett integrálját:

$$\mathbf{v}(x,y,z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}(u,v) = (u+2v)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k},\ u \in [0,3],\ v \in [0,1]$$

6. Feladat. Számítsuk ki az **v** = **r**-nek az R sugarú, M magasságú, z tengely? hengerre vonatkozó felületi integrálját!

7. Feladat. Számítsuk ki az R sugarú origó középpontú gömbfelszín els? nyolcadba es? felületére az **v** = **r**|**r**|^3 integrálját!

Utak homotópiája

8. Feladat. Igazoljuk, hogy a "http://wiki.math.bme.hu*t* út homotóp az *s*-sel"http://wiki.math.bme.hu ekvivalencia reláció!