

## Tartalomjegyzék

- 1 A differenciáloperátor vektor és skalárinvariánsai
- 2 Integráltranszformációs (-redukciós) tételek
- 3 Stokes-tétel
- 4 Gauss-tétel
- 5 További feladatok

## A differenciáloperátor vektor és skalárinvariánsai

Az, hogy az  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  leképezés differenciálható az értelmezési tartományának egy  $u$  pontjában, definíció szerint azt jelenti, hogy

$$\exists \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u) - \mathbf{A}(x - u)}{\|x - u\|} = 0$$

Itt az  $\mathbf{A}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  lineáris leképezés nem más, mint a differenciál operátor, azaz  $df(u)$ . Természetesen  $\mathbf{A}$  koordinátafüggetlen, bár egy  $B$  bázis választásával  $\mathbf{A}$ -t mátrixként tudjuk reprezentálni. Értelmes ekkor a  $\det(\mathbf{A})$ -t és a  $\text{tr}(\mathbf{A})$ -t (azaz a trace  $\mathbf{A}$ -t) tekinteni, amik invariáns, azaz koordinátafüggetlen, csak az  $\mathbf{A}$ -tól függ? skalármennyiségek. Ezek a Szernderd bázisban a  $J$  Jacobi-mátrix determinánsa és  $f$  átlójának összege. Konkrétan:

$$\text{div } f(u) = \text{tr } J^f(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \nabla f$$

Ha  $B$  ortonormált és csak ortonormált báziskora szorítkozunk, akkor értelmes az  $\mathbf{A}$  transzponáltjáról, szimmetrikus és antiszimmetrikus részéről beszélni. ezen felül, ha  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  függvény, akkor az antiszimmetrikus rész vektoriális szorzat formájában is elártható, azaz

$$\frac{1}{2} \text{rot } f(u) \times x = (df(u))_{AS} x = (\nabla \times f)(u) x$$

ahol az első tényező a vektorinvariáns, ennek kétszerese a rotáció.

## Integráltranszformációs (-redukciós) tételek

Alapséma: a Newton--Leibniz-formula. Adott az  $M$  sokaság és a sokaság  $\partial M$  pereme. Az  $\mathbf{v}: M \rightarrow M$  folytonosan differenciálható függvény

$$\int_{\partial M} \mathbf{v} = \int_M \partial \mathbf{v}$$

A kérdés, hogy mi a derivált.

(1. gradiens tétel) ha  $M$  görbe, akkor  $\partial M$  két pont és  $\partial f = \text{grad } f$ ,

(Stokes-tétel) ha  $M$  felület, akkor  $\partial M$  görbe és  $\partial \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v}$ ,

(Gauss--Ostrogradskij-tétel) ha  $M$  térrész, akkor  $\partial M$  felület és  $\partial \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$

## Stokes-tétel

$$\int_{\partial F} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_F \mathbf{v} \, d\mathbf{F}$$

1.

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix},$$

(irány:  $t$  növekedése)

2.

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y^2 + 2xy \\ x^2 + yx \\ z^2 \end{pmatrix},$$

(1,0,0),(2,0,0),(1,1,0) háromszög pozitívan ir.

(irány:  $t$  növekedése)

3.

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \\ 3z^3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

(irány:  $t$  növekedése)

## Gauss-tétel

$$\int_{\partial V} \mathbf{v} \, d\mathbf{F} = \int_V \text{div } \mathbf{v} \, dV$$

1.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} |\mathbf{r}|^5,$$

$F$  az első térfogad és az  $O$  középponttú  $R$  sugarú gömbtest metszetének a felülete.

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}\Phi) = \operatorname{div}(\mathbf{v})\Phi + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}\Phi$$

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \operatorname{dim}, \operatorname{grad} |\mathbf{r}|^\alpha = \alpha |\mathbf{r}|^{\alpha-2} \mathbf{r}, \alpha \geq 2$$

2.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{v}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$F$ :  $R$  sugarú,  $z$  tengelyre,  $+H$ ,  $-H$  magasságban lévő alap és fedőlapú henger.

3.

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ xy \\ yz \end{pmatrix}$$

$F$ : Egységsugarú felső félgömbfelület.

polárkoordináta: térfogategység:  $r^2 \sin \theta$ ,  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$

## További feladatok

1.  $\mathbf{v}(x, y, z) = y^2 \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$ , görbe:  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, a, 0)$ ,  $C(0, 0, a)$ , alkotta háromszög,  $a > 0$  ilyen körüljárással. Vonalintegrál.

2.  $\mathbf{v}(x, y, z) = 2(x^2 + y^2) \mathbf{i} + (x + y)^2 \mathbf{j}$ , görbe:  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(2, 2, 0)$ ,  $C(1, 3, 0)$ , alkotta háromszög vonal, ilyen körüljárással. Vonalintegrál.

3.  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$  és a  $z$  tengelyre,  $+H$  magasságú,  $R$  sugarú henger felülete. Felületi integrál.

4.  $\mathbf{v}(x, y, z) = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$  és az  $R$  sugarú origó kp-ú gömbfelszín. Felületi integrál.