

Tartalomjegyzék

- 1 Komplex integrál
 - ♦ 1.1 Integrál
kiszámítása
paraméteresen
 - ♦ 1.2
Newton--Leibniz-tétel
 - ♦ 1.3 Cauchy-tétel
- 2 Cauchy-típusú integrálok

Komplex integrál

A komplex integrálás egy bizonyos pontig szoros párhuzamot mutat az $\mathbf{R}^2$ -re vonatkozó integráltételekkel. Azonban Goursat eredményét figyelembe véve kiderül, hogy a nyílt halmazon értelmezett komplex differenciálható függvények egyetén differenciálhatósági osztályt alkotnak (a valósokkal szemben), és pedig az analitikust, amit ez esetben regulárisnak neveznek.

Definíció szerint, ha $f: D \rightarrow \mathbf{C}$ egy nyílt tartományon értelmezett függvény és $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ folytonosan differenciálható görbe, akkor a f integrálja a γ mentén:

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \cdot \Delta z_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{\forall z_i \in \gamma, \forall \zeta_i \in \Delta z_i \\ |\Delta z_i| \rightarrow 0}} \int_{\gamma} f(z) dz$$

Fontos, hogy a fenti definícióban az $f(z) \Delta z$ egy komplex szorzat.

Persze itt olyan fogalmakkal dolgozunk, amelyeket nyugodtan átfogalmazhatunk egy vonalintegrál párrá, a következőképpen. Tekintsük az $f = u + v i$ függvényt és a $dz = dx + i dy$ szimbólumot. Ekkor $f dz$ komplex formális szorzát elvégezve kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx = \\ &= \int_{\gamma} (u, -v) dr + i \int_{\gamma} (v, u) dr \end{aligned}$$

Integrál kiszámítása paraméteresen

A vonalintegrál kiszámítására vonatkozó formula komplex változata az lesz, hogy:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t=a}^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt$$

Itt $z(t) = (x(t), y(t))$. De így ritkán számolunk komplex integrált.

1. Feladat. $r > 0$

$$\int_{|z|=1, \operatorname{Re}(z) \geq 0} 3z^2 dz = ?$$

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = ?$$

$$\text{b) } |z|=r$$

Mo.

$$\int_{|z|=1, \operatorname{Re}(z) \geq 0} 3z^2 dz = \int_{t=0}^{\pi} 3e^{2it} i e^{it} dt =$$

hiszen a paraméterezés $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Egy vektorértékű valós változós függvényt komponensenként integrálunk:

$$\begin{aligned} &= \int_{t=0}^{\pi} 3i e^{3it} dt = \int_{t=0}^{\pi} 3i (\cos(3t) + i \sin(3t)) dt = \\ &= 3i \int_{t=0}^{\pi} \cos(3t) dt - 3 \int_{t=0}^{\pi} \sin(3t) dt = \cos(3\pi) - \cos(0) = -2 \end{aligned}$$

2. Mo. Szerencsére a komplex analízisben van is van Newton--Leibniz formula:

$$F(z) = z^3, \quad F(-1) - F(1) = -1 - 1 = -2$$

b)

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{r e^{it}} i r e^{it} dt = i \int_{t=0}^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Newton--Leibniz-tétel

$\mathbf{R}^2$ vektorfüggvényeinek integrálása könnyen elvégezhető, ha feltesszük hogy az integrandusnak van potenciálja. Ekkor az első gradiens tételre kell hivatkoznunk. Komplex esetben ez az összefüggés a valós N--L-formula alakját ölti.

Tétel (Newton--Leibniz) Ha $f: D \rightarrow \mathbf{C}$ folytonos a D nyílt halmazon és létezik primitív függvénye, akkor minden a D -ben haladó $[a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ görére:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

ahol kezd? és végpontja $z(a)$ és $z(b)$.

2. Feladat. Igazoljuk a N--L-tételt!.

Mo. Tegyük fel, hogy $F=f$ és legyen $F = (\quad , \quad)$, $f=(u,v)$. Ekkor F deriváltja azonosítható a $(\quad , \quad)$ vektorfüggvény Jacobi-mátrixával, ami a feltevés szerint folytonos és egyenl? $f=(u,v)$ mátrixalakjával.

$$J^{(\Phi)} = \begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{grad } \Phi \\ \text{grad } \Psi \end{bmatrix}$$

Mindkét komponensre felírhatjuk tehát az els? gadiens tételt, és kapjuk:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} (u, -v) dr + i \int_{\Gamma} (v, u) dr = \\ &= \int_{\Gamma} \text{grad } \Phi dr + i \int_{\Gamma} \text{grad } \Psi dr = \Phi(2) - \Phi(1) + i(\Psi(2) - \Psi(1)) = F(2) - F(1) \end{aligned}$$

3. Feladat.

$$\oint \frac{1}{z^2} dz = ?$$

a) $|z|=1$

$$\oint \frac{1}{z} dz = ?$$

b) $|z|=1$

Mo. a)

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz = F(1) - F(1) = -\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 0$$

hiszen $F(z)=-1/z$ -vel $F'=f$.

b)

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \ln(e^{2\pi i}) - \ln(e^0) = 2\pi i$$

ahol $\ln 1$ -et kétféleképpen, egyfel?l az els?, másfel?l a második Riemann-levélen számoltuk ki. A logaritmus Riemann-felületén a logaritmus ugyanis már egyérték?.

4. Feladat Legyen $n \in \mathbb{Z}$, $r>0$. Mennyi:

$$\int_{|z|=r} z^n dz$$

Newton--Leibniz-tétel

Mo. $n \neq -1$ -re létezik primitívfüggvény, ezért

$$\int_{|z|=r} z^n dz = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{ha } n = -1 \end{cases}$$

Cauchy-tétel

A síkon a Stokes- és a Gauss-tétel közül elegendő csak az egyiket ismernünk, mert igazolható, hogy az egyik tétel átfogalmazható a másikba (lásd Serény György: Formális és személetes vektoranalízis). A rotáció és a divergencia ugyan különböznek egymástól, de szintén igazolható, hogy bizonyos értelemben egymással azonosíthatóak.

Legyen f reguláris az egyszeresen összefüggő U tartományon és legyen tetszőleges egyszerű, zárt görbe D U határa. Írjuk fel a Stokes-tételt!

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= \oint_{\Gamma} (u, -v) dr + i \oint_{\Gamma} (v, u) dr = * \\ \operatorname{rot} (u, -v) &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \operatorname{rot} (v, u) &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ * &= \oint_D 0 dF + i \oint_D 0 dF = 0 \end{aligned}$$

A meglepő, hogy a Goursat-tétel miatt ez a tétel akkor is igaz, ha f -ről nem tesszük fel azt, amit a Stokes-tétel, azaz hogy folytonosan differenciálható.

5. Feladat. Legyen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mindenhol reguláris kivéve az $x_0=0$ pontban. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\int_{|z|=2010} f dz = \int_{|z|=\frac{1}{2010}} f dz$$

Cauchy-típusú integrálok

Reguláris f -re és egyszerű görbére:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z} \cap [0, +\infty)$$

6. Feladat.

$$\int \frac{2z-1}{z^2-2iz} dz = ?$$

$$(a) \int_{|z-3i|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5} dz = ?$$

$$(b) \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2+1} dz = ?$$

$$(c) \int_{|z|=2}$$

Mo. (a)

$$\int_{|z-3i|=2} \frac{2z-1}{z^2-2iz} dz = \int_{|z-3i|=2} \frac{2z-1}{z(z-2i)} dz =$$

a 0 kívül esik a körön, ezért a körön belül az $f(z) = 2z-1/z$ reguláris, ezért az integrált előállítja a $2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$, ahol $z_0=2i$

$$= \int_{|z-3i|=2} \frac{\frac{2z-1}{z}}{z-2i} dz = 2\pi i \left. \frac{2z-1}{z} \right|_{z=2i} = 2\pi i \frac{4i-1}{2i} = 4\pi i - \pi$$

(b)

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} \operatorname{ch}^{(4)}(0) = \frac{\pi i}{12}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+1} dz &= \int_{|z+i|=1/2} \frac{\frac{\sin z}{z-i}}{z+i} dz + \int_{|z-i|=1/2} \frac{\frac{\sin z}{z+i}}{z-i} dz \\ &= 2\pi i \frac{\sin(-i)}{-2i} + 2\pi i \frac{\sin(i)}{2i} = 2\pi i \sin i = \pi \left(e + \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$