Tartalomjegyzék

Laurent-sor

1. Feladat Igazoljuk, hogy ha $\sum_{-} c_n(z-z_0)^n$ hatványsornak a z_0-ban izolált szingularitása van, máshol reguláris, akkor

$$\oint_G \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1}$$

Mo. Ugyanis,

$$\oint_G \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \oint_G c_n(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z =$$
$$= \oint_G c_{-1}(z-z_0)^{-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1}$$

mert a primitív függvénnyel rendelkez? tagok integráljai nullák.

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = c_{-1}$$

2. Feladat. Állítsuk el? a 3/2 i számot

$$\frac{i}{(z+i)(z+2i)}$$ -t a 0 körül

Mo.

$$\frac{i}{(z+i)(z+2i)} = \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z+2i} =$$

Izolált szingularitások osztályozása

Ha az f a $\dot{\mathrm{B}}_\delta(z_0)$ -n reguláris, de a z_0-ban nem, akkor itt izolált szingularitása van. Ilyen az 1/z a 0-ban és nem ilyen a 1/sin(1/z) a 0- körül.

Az izolált szingularitások osztályozatók a Laurent-sora tagjai szerint.

Megszüntethet? szingularitás

Ha a Laurent sor f?része eltünik, akkor a függvény regulárissá tehet?.

3. Feladat Milyen szingularitása van a 0-ban, mennyi ott a reziduuma, mennyi a körintegrálja a 0 körüli egségkörön?

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z = ?$$

Mo. Megnézzük az értelmezési tartományt!

$$1-\cos z = 0,\ \cos z = 1,$$
$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 1$$
$$e^{2iz} - 2e^{iz} + 1 = 0$$
$$(e^{iz}-1)^2 = 0$$
$$e^{iz} = 1$$
$$iz = k2\pi i\ ,\ z = 2\pi k$$

Tehát a kör lapon értelmes kivéve a 0-t, ahol viszont korlátos egy környezetben:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$$

A maradék kompakton folytonos, így korlátos, tehát az el?z? tétel értelmébena körintegrálja elt?nik, a reziduuma 0, a szakadása megszüntethet?.

Pólusszingularitás

Ha a Laurent-sorban az els? nemnulla tag az $1/z^n$-hez tartozó, akkor ott a függvénynek n-edrend? pólusa van.

Persze ekkor $f(z)z^n$ már reguláris.

4. Feladat Milyen a szingularitása, mennyi a reziduuma, mennyi a körintegrálja az egysékörön a 0-ban?

a) $\dfrac{\sin z^3}{z^{1820}}$

b) $\dfrac{1}{\sin 2z}$

Mo.

a) $\dfrac{\sin z^3}{z^{1816}} = \dfrac{\sin z^3}{z^3}\dfrac{1}{z^{1813}}$

A sorból:

$$\frac{1}{z^{1816}}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n z^{6n+3}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}\frac{(-1)^n z^{6n-1813}}{(2n+1)!}$$

b) Tudjuk,

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin 2z}{z}=2$$

emiatt zf(z) már reguláris, ezért a Laurent-sorában a f?részben egyedül a c_{-1}-hez tartozó tag van.

$$\frac{1}{\sin 2z}=c_{-1}\frac{1}{z}+c_0+c_1z+\dots$$
$$\frac{1}{2z-\frac{1}{6}(2z)^3+\dots}=c_{-1}\frac{1}{z}+c_0+c_1z+\dots$$
$$1=(2z-\frac{1}{6}(2z)^3+\dots)(c_{-1}\frac{1}{z}+c_0+c_1z+\dots)$$
$$1=2c_{-1},\ c_{-1}=\frac{1}{2}$$
$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{\sin 2z}\,\mathrm{d}z=\pi i$$

Szeparábilis differenciálegyenlet

5. Feladat Igazoljuk, hogy az alábbi differenciálegyenletnek minden (x_0,y_0) **R**×**R**-re van az $y(x_0) = y_0$-at kielégít? egyértelm? megoldása:

$$y'=\frac{\sin x}{\operatorname{ch} y}$$

6. Feladat. Ellen?rizzük, hogy fennáll-e a Pickard--Lindelöf- és a Cauchy--Peano-tétel feltételei ill. adjuk meg, hány megoldása van a y(0)=0 kezdeti érték mellett az

$$y'=\frac{1}{\sqrt{|y|+1}}$$

egyenletnek.

7. Feladat. Ellen?rizzük, hogy fennáll-e a Pickard--Lindelöf- és a Cauchy--Peano-tétel feltételei ill. adjuk meg, hány megoldása van a y(0)=0 kezdeti érték mellett az

$$y'=x^4\cos^2 y$$

egyenletnek.

Házi feladatok

1. Írja fel az $f(z) = \dfrac{z^2}{z+2i}$ függvény azon 0 körüli Laurent-sorát, mely el?állítja az 1-et! Azt is adjuk meg, mely a -3-t állítja el?!
2. Írja fel az $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ függvény 1 körüli összes Laurent-sorát!
3. Számítsa ki az $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{\sin z}$ függvény 0 középponttú egységsugarú körre vett integrálját és a szakadás jellegét határozza meg.
4. Milyen szakadása van az $f(z) = \dfrac{\cos z}{\sin^2 z}$ függvénynek a 0-ban és mennyi az integrálja a 0 középpontú egységkörre?
5. $z^3 e^{\frac{1}{z^2}}$ szakadásának jellege, reziduuma és integrálja?