Numerikus sor definíciója

$(a_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$ sorozat, akkor ennek részletösszegsorozata:

$$(s_n) : n \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k$$

(s_n)-t az (a_n) sorozatból képezett **sor**nak nevezzük és azt mondjuk, hogy az (s_n) sor konvergens, és összege az

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

szám, ha az (s_n) sorozat konvergens, és határértéke

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Megjegyzés A $z_n = x_n + iy_n$ komplex sorozat konvergens és határértéke a z komplex szám, ha minden >0 szám esetén létezik N, hogy ha n>N, akkor |z_n-z|< . (z_n) konvergens pontosan akkor, ha (x_n) és (y_n) is konvergens, mint valós sorozat.

1. Számítsuk ki a következ? sorok összegét (ha létezik)!

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{6^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^{2n}}{3^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+4}$ (!)

Mo.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2i}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2i}{3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots\right) = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right)=...$$

Cauchy-kritérium, integrálkritérium, szükséges feltétel

Cauchy-kritérium. Az (a_n)-b?l képezett (s_n) konvergens, pontosan akkor, ha minden >0-hoz létezik N, hogy minden m>n>N-re

$$|s_m - s_n| < \varepsilon$$

Szükséges feltétel. Ha $\sum(a_n)$ konvergens, akkor (a_n) nullsorozat.

Integrálkritérium. Ha az $f:[N,\infty]\to\mathbf{R}$ monoton csükken? és pozitív valós függvény, akkor az

$$\int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

imprópius integrál és a

$$\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$$

numerikus sor egyszerre konvergens.

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n+1\right)\frac{1}{n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{arctg} n}$

Mo.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$$

legyen =1, N tetsz?leges, m=2N, n=N. Ekkor

$$|s_m - s_n| = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N+k} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} = 1$$

Intergálkritériummal:

$$\int_0^\infty xe^{-x}\, \mathrm{d}x = [x(-e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}\, \mathrm{d}x = 0 + [e^{-x}]_0^\infty = 1$$