Tartalomjegyzék

Matematika verseny 2012

A 2012. évi BME Matematika versenyt 2012. április 17-n rendezték meg. A verseny általános leírását lásd a Matematika verseny lapon, a feladatsort és eredményeket Horváth Miklós honlapján.

Ez a lap a feladatokat tartalmazza, de ide (vagy allapokra) lehet írni a feladatok megoldását vagy megjegyzéseket hozzájuk.

1. feladat

Legyenek a és b relatív prím természetes számok. Melyik az a legnagyobb természetes szám, amely nem áll el? $ak_1 + bk_2$ alakban, ahol k_1,k_2 nemnegatív egészek?

2. feladat

Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $\lim_{x\to\infty}\int_0^x f = A$ véges határérték. Mutassuk meg, hogy bármely > 0 mellet az $\int_0^\infty e^{-\delta t}f(t)dt$ improprius integrál konvergens és

$$\lim_{\delta\to 0+}\int_0^\infty e^{-\delta t}f(t)dt = A.$$

3. feladat

Legyen $T_1(x)$ az e^x függvény a pontbeli érint?egyenese. Melyik a értékre lesz $\max_{[0,1]} | e^x - T_1(x) |$ a legkisebb?

4. feladat

Egy tetraéder AB és CD élei mer?legesek egymásra, mindegyik $2a$ hosszú. A felez?pontjaikat összeköt? EF szakasz mindkét élre mer?leges, az AC, AD, BC, BD éleknél lév? lapszögek 60°-osak. Meghatározandó a tetraéder beírt és körülírt gömbjeinek sugara.

5. feladat

Keressük meg az összes olyan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvénypárt, melyre $f^2 + g^2 = 1$ és $f'^2 + g'^2 = 1$.

6. feladat

Adott egy n szögpontú egyszer? gráf. Bizonyítsuk be, hogy

a. Ha minden pont foka legalább 3, akkor van a gráfban páros hosszú kör.

b. Abból, hogy minden pont foka legalább $(n - 1) / 2$, nem következik, hogy van a gráfban páratlan kör. Adjunk ellenpéldát minden n-re.

c. Ha minden pont foka legalább $(n + 1) / 2$, akkor van a gráfban páratlan kör.

7. feladat

Az $x \geq 0$ félsíkban tekintsünk K_n köröket, melyek az origóban érintik az y tengelyt, és K_n sugara kétszerese K_{n+1} sugarának, $n = 1, 2, \ldots$. Adott jelre a K_{n+1} körök azonos konstans szögsebességgel gördülni kezdenek a K_n körvonalon, azt belülr?l érintve, negatív forgásirányban. A K_n kör középpontja által leírt görbe legyen $_n$. Mi lesz $_n$ határgörbéje, ha $n \to \infty$? Adjuk meg a határgörbe paraméterezését.

8. feladat

A $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ összeg milyen n esetén egész szám?

9. feladat

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható és tegyük fel, hogy az $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x)$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens. Adjuk meg az $S(x)$ összegfüggvényt zárt alakban.

10. feladat

Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ lineáris leképzések. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan $\mathbb{R}^3 = V_1(+)V_2$, $\mathbb{R}^5 = W_1(+)W_2$ direkt összeg-felbontások, hogy i = 1,2-re $f(V_i) \subset W_i$, $g(V_i) \subset W_i$ és $V_i(+)W_i \neq 0$.

11. feladat

Sorban állok a postán. n ablaknál szolgálják ki az ügyfeleket. Egyetlen sor van, ahonnan az éppen felszabaduló ablakhoz megy, aki következik. Egy ügyfél kiszolgálási ideje bármelyik ablaknál független, > 0 paraméter? exponenciális eloszlást követ. Mi a valószín?sége annak, hogy a k-ik ugánam következ? el?bb végez, mint én? Mi a válasz akkor, ha az i-ik ablaknál a kiszolgálási id? eloszlása $_i > 0$ paraméter? exponenciális eloszlás?

Megjegyzések