

## Tartalomjegyzék

- 1 Permutáció
- 2 Példák
- 3 Megoldások
- 4 Ismétléses permutáció

## Permutáció

Ha adott az  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  véges,  $n$  elemű halmaz, akkor ennek egy (ismétlés nélküli) permutációjának nevezzük az elemei egy  $n$  elemű véges sorozatba rendezését.

Pl.: ha a halmaz a következő kártyalapokat tartalmazza: {kőr dáma, treff dáma, káró dáma, pikk dáma}, akkor ennek egy permutációja:

(kőr dáma, káró dáma, pikk dáma, treff dáma), vagy (káró dáma, kőr dáma, treff dáma, pikk dáma), stb.

Ezek száma:

$$P_n = n!$$

## Példák

1. Anna, Gabó, Réka és Petra együtt mennek egyetemre. Hányféle sorrendben léphetik át az egyetem küszöbét, ha mind külön lépnek be?
2. Hány különböző ötjegyű szám alkotható a páratlan számjegyekből, ha mindegyik helyiértéken különböző számjegy áll?
3. Hány különböző ötjegyű szám alkotható a páros számjegyekből, ha mindegyik helyiértéken különböző számjegy áll?
4. Kiteszünk az asztalra sorban négy üveget: Fanta, Sprite, Cherry Coke, Traubiszóda. a) Hányféle sorrendben rakhatjuk őket sorba? b) Hányféle sorrendben rakhatjuk őket sorba, ha a Coca Cola termékeket ugyanolyannak vesszük?
5. Hányféleképpen állíthatunk sorba 7 fű 12. A-st és 6 fű 12. B-st, ha a sorrendben csak az számít, hogy melyik osztályban vannak, de az nem, hogy kik ők.
6. Hányféleképpen állíthatunk körbe 7 diákot?
7. Hányféleképpen állhat 7 diák körbe, ha Anna és Gergő feltétlenül egymás mellé kell, hogy kerüljenek?
8. Hány olyan hatjegyű szám létezik, melyben a tízesek helyén a 3-as van, és az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek mindegyike szerepel benne?
9. Egy öt csúcspontú teljes gráf minden csúcsát beszámozzuk. Hány különböző csúcsokból álló háromszöget színezhetünk ki benne?

## Megoldások

1. Ez 4 elem összes permutációinak száma:  $4!$ . Vagy először 4 lány közül választhatunk, majd 3, 2, és 1. Ezek egymástól független választások, ezért össze kell szoroznunk őket:  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

2. 5 páratlan számjegy van: 1, 3, 5, 7, 9, ezek összes permutációinak száma a kérdés: ez  $5!$ .

3. 5 páros számjegy van: 0, 2, 4, 6, 8. Ezekből készíthetünk ötjegyű számokat. Ezek nem kezdődhetnek 0-val, ezért az első számjegy lehet

4. a) Ez 4 elem összes permutációinak száma:  $4!$ . b) Ha a C.C. termékek ugyanolyannak minősülnek (jelöljük őket C-vel, a Traubiszódát T-vel) akkor négy különböző sorozat lehetséges: TCCC, CTCC, CCTC, CCCT. Vagy, ha 4 elemet sorba rendezünk, akkor ezt  $4!$ -féleképpen lehet megtenni. De akkor vannak esetek, amiket többször számoltunk, mert pl. a TFSC és a TFCS esetek ugyanannyak minősülnek. Tehát minden esetet az F, C, S minden sorrendje ugyanannyak minősül, ez  $3!$ . Ennyiszerese az eredménynek az a) eset megoldása, tehát, ha ezeket az eseteket nem számoljuk:

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

az összes lehetségek száma. (Ez tekinthető ismétléses permutációnak is.)

5.

$$\frac{13!}{7! \cdot 6!}$$

mert minden esetet többször, éspedig  $7! \cdot 6!$ -szor számoltunk, mert ennyi sorrendje lehet a 7 ill. a 6 egy osztályba tartozó diáknak. (Ez tekinthető ismétléses permutációnak is.)

6. Ha sorban állnának,  $7!$  lenne az eredmény. Mivel nincs első, ezért a sor bárhol kezdődhet, azt attól még ugyanaz az eset. Ez azt jelenti, hogy minden esetet 7-szer számoltunk, azaz ezzel kell leosztani a  $7!$ -t. Azaz  $6!$ . Vagy kijelölünk egy fixpontot. Innen már csak  $6!$  lehetőség lehet a körön belül a sorba állításra.

7. Anna és Gergő kétféleképpen helyezkedhetnek el a körben egymás mellett. Ezután marad  $5!$  a sorrendre, ez  $2 \cdot 5!$  lehetőség.

8. A tízesek helyére letesszük a 3-ast. A többi helyre  $5!$ -féleképpen választhatunk számjegyeket, mert minden számnak legalább egyszer szerepelnie kell, amiből az következik, hogy pontosan egyszer.

9. Ha a háromszög A, B, C csúcsait megkülönböztetnénk, akkor az A-nak 5, a B-nek 4, a C-nek 3 csúcsot választhatunk. Ezeknek a lehetőségeknek a száma  $5 \cdot 4 \cdot 3$ . De a sorrend nem számít, azaz ezt  $3!$ -sal el kell

osztani: 10. (Ez felfogható kombinációnak is: 5 elemből kell kiválasztani 3-at, ez  $\binom{5}{3} = 10$ .)

## Ismétléses permutáció

Legyen  $n$  elemünk és legyen ezek között  $k_1, k_2, \dots, k_l$  darab azonos (tehát  $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$ ). Ha mindezt az  $n$  elemet felsoroljuk egy  $n$  elemű véges sorozatban, akkor ezeknek az elemeknek egy ismétléses permutációját kapjuk. Ezeknek az elemeknek az összes ismétléses permutációinak számát a következőképpen számíthatjuk ki:

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_l} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_l!}$$