

Páros_gráfok

Akkor nevezünk egy G gráfot párosnak, ha G csucsainak halmazát fel tudjuk úgy osztani egy A és B halmazra, hogy az összes G -beli élre teljesül hogy az egyik végpontja A -ban van, a másik pedig B -ben. Egy G páros gráfot következésképpen jelölünk: $G = (A, B)$.

Teljes páros gráfnak nevezünk egy olyan páros gráfot melyben minden A -beli pont össze van kötve minden B -beli ponttal. Jelölés: $K_{a,b}$, ahol $a = |A|$ és $b = |B|$.

Tétel

Egy G gráf akkor és csak akkor páros, ha minden G -beli kör páros hosszúságú.

Bizonyítás:

Az első irány nyilvánvaló, ugyanis ha C egy kör a G páros gráfban, akkor C pontjai alternálnak A és B között. Tehát világos hogy C -nek páros sok csúcsa van.

A másik irányhoz megmutatjuk, hogy ha G minden köre páros sok pontból áll, akkor meg tudunk adni megfelelő A és B halmazokat. Tekintsünk egy tetszőleges x pontot a gráfban. Ezt rakjuk A -ba. Most, x minden szomszédját rakjuk B -be, és az összes olyan B -beli pont szomszédját amelyet még nem helyeztünk el, rakjuk A -ba. Ezt folytassuk amíg minden pontot el nem helyeztünk A -ba vagy B -be. Ez az algoritmus azért lesz jó, mert ha egy halmazban lenne két szomszédos csúcs, akkor a gráfban lenne páratlan kör is, ez viszont ellentmondás.