Tartalomjegyzék

Folytonosság és határérték

Definíció. Azt mondjuk, hogy az *f*: **R** $\supset\!\!\!\to$ **R** függvény **folytonos** az *u*   Dom(*f*) pontban, ha

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta > 0 \; f(B_\delta(u)) \subseteq B_\varepsilon(f(u))$$

jelben: $f \in \mathrm{C}(u)$.

Ehhez rendkívül hasonló fogalom a határérték, de azt nem Dom(*f*) pontjaiban vizsgáljuk, hanem ehhez közeli pontokban, Dom(*f*) torlódási pontjaiban. Arra van ugyanis szükségünk, hogy matematikailag meg tudjuk fogalmazni a "http://wiki.math.bme.huközeli"http://wiki.math.bme.hu fogalmat.

Néhány topologikus fogalom

Ha *H*   **R** valós számhalmaz, akkor az *u* $\overline{\mathbf{R}}$ pontot az *H*

- **torlódási pontjának** nevezzük, ha

$$\forall r > 0 \; (B_r(u) \setminus \{u\}) \cap H \neq \emptyset$$

(ill. ekvivalens módon: (B_r(*u*)\{u})   *H* végtelen) jelben: $u \in H'$.

- **izolált pontjának** nevezzük, ha $u \in H$, de $u \notin H'$.
- **bels? pontjának** nevezzük, ha

$$\exists r > 0 \; B_r(u) \subseteq H$$

jelben: $u \in \operatorname{int} H$.

- **határpontjának** nevezzük, ha $u \in H'$ és $u \in \overline{H}'$.

A folytonosság definíciójából következik, hogy 1. a polinomok folytonosak, 2. izolált pontban a függvények folytonosak.

Példa

1. a) Mik az izolált, torlódási, bels? pontjai?

$$\{1\} \cup [2,3)$$

1. b) Folytonos-e az inverze?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-1, & \text{ha} \quad x<0 \\ 0, & \text{ha} \quad x=0 \\ x^2+1, & \text{ha} \quad x>0 \end{cases}$$

($f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot (x^2+1)$)

Határérték

Definíció. Legyen f: **R** $\supset\!\!\to$ **R** függvény, u Dom(f)' és A u $\overline{\mathbf{R}}$. Ekkor

$$\exists \lim_u f = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\;\exists\delta>0\; f(B_\delta(u)\setminus\{u\}) \subseteq B_\varepsilon(A)$$

Tétel A. -- Folytonos függvény határértéke a helyettesítési értéke --

Legyen $f:\mathbf{R}\supset\!\!\to\mathbf{R}$ és $u\in\mathrm{Dom}(f)$, ekkor a következ?k ekvivalensek egymással:

1. $f\in \mathrm{C}(u)$
2. vagy u izolált pontja Dom(f)-nek, vagy $u\in\mathrm{Dom}(f)'$ és $\exists \lim_u f = f(u)$.

```
          *******************
******************        * Dom(f)'
*  iz   *  lim, C *       *
*       *******************
******************
Dom(f)
```

Tétel B. -- Véges helyen véges határérték? függvény folytonossá tehet?, megszüntethet? szakadás -- Legyen $f:\mathbf{R}\supset\!\!\to\mathbf{R}$, $u\in\mathbf{R}\cap\mathrm{Dom}(f)'$ és A véges (**R**-beli) szám. Ekkor a következ?k ekvivalensek.

1. $\exists \lim_u f = A$
2. létezik $\overline{f}\colon\mathrm{Dom}(f)\cup\{u\}\to\mathbf{R}$, $\overline{f}\in\mathrm{C}(u)$, hogy $\overline{f}|_{\mathrm{Dom}(f)\setminus\{u\}} = f|_{\mathrm{Dom}(f)\setminus\{u\}}$ és $\overline{f}(u)=A$

Szakadás

A folytonosság Heine-féle jellemzése: Az f: **R** $\supset\!\!\to$ **R** függvény folytonos az értelmezési tartománya egy u pontjában, ha

$$(\forall (x_n)\in\mathrm{Dom}(f)^{\mathbf{Z}^+})\; x_n\to u \;\Rightarrow\; f(x_n)\to f(u)$$

Ebb?l kapjuk azt a rendkívül hasznos eszközt, amellyel a nem-folytonosságot jellemezni tudjuk:

Pontbeli nem-folytonosság jellemzése. Az *f*: **R** $\supset\!\!\to$ **R** függvény nem folytonos az értelmezési tartománya egy *u* pontjában, ha

létezik olyan $(x_n) \in \mathrm{Dom}(f)^{\mathbf{Z}^+}$ sorozat, hogy bár $x_n \to u$, de $f(x_n) \not\to f(u)$.

Definíció. $f : \mathbf{R} \supset\!\!\to \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{R} \cap \mathrm{Dom}(f)'$. Azt mondjuk, hogy *f*-nek szakadása van *u*-ban, ha vagy $u \notin \mathrm{Dom}(f)$ vagy $f \notin \mathrm{C}(u)$.

Példa

2. sgn nem folytonos 0-ban,

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$,

4. $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

5. $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

Nevezetes határértékek

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$$

Példák

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)} =?$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{x} =?$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\operatorname{arc\,tg} x + \pi}{2\operatorname{arc\,tg} 3x + 3\pi}$$

Differenciálhatóság

Legyen *f* valós-valós függvény, *u* Dom(*f*) Dom(*f*)'. Az *f* függvény differenciálható az *u* pontban, ha

1. Definíció -- létezik olyan : Dom(*f*) $\longrightarrow$ **R** függvény és olyan *m* **R** szám, hogy:

1. minden *x* Dom(*f*)-re
   f(*x*) = *f*(*u*) + *m*(*x* - *u*) + (*x*)(*x* - *u*) és
2. (*u*) = 0 és az *u*-ban folytonos.

Ebben az esetben az *f* függvény *u*-beli deriváltja *m* és jele f'(*u*)

2. Definíció -- létezik és véges a következ? határérték:

$$\lim_{x\to u}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\qquad(*)$$

Ekkor f'(*u*) maga a fenti határérték.

A két definíció ekvivalens, amit a következ? egyenl?séggel lehet igazolni:

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}-A, & \text{ha}\quad x\neq u\\ \lim\limits_{x\to u}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}-A, & \text{ha}\quad x=u\end{cases}$$

ahol *A* az *m*-et jelöli, ha 1)-et tudjuk és 2)-t igazoljuk és $\lim_{x \longrightarrow u}$ (f(x)-f(u)/(x-u))-t, ha fordított a helyzet.

Világos, hogy a (*) határérték egy úgy nevezett határozatlan kifejezés, hisz mindig 0/0 alakú. Ez a a szel?k meredekségének határértéke,

Az els? definíció is szemléletes. Itt arról van szó, hogy a függvény felírható *u* körül egy lineárisan elt?n? és egy magasabb rendben elt?n? tag összegeként:

$\ell(x)=f(u)+m(x-u)$, a lineáris és $\varepsilon(x)(x-u)$ a nemlineáris

Példa. Igazoljuk, hogy

$$f(x)=e^{\sin x}$$

differenciálható a 0-ban és deriváltja 1.

Megoldás. Definíció szerint igazoljuk, azaz a pontbeli derivált (*) képletével. Legyen x≠0. Ekkor

$$\frac{e^{\sin x}-e^{\sin 0}}{x-0}=\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\frac{x}{\sin x}$$

Ha most $x \longrightarrow 0$, akkor az utolsó egyenl?ség után az els? tényez? és a második tényez? is az 1-hez tart, minthogy ezek nevezetes határértékek.

Példa. Igazoljuk, hogy

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x}-\frac{1}{4}\sin x, & \text{ha} \quad x\neq 0\\ 0, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

differenciálható a 0-ban és deriváltja 1/4.

Megoldás. Definíció szerint igazoljuk, azaz a pontbeli derivált (*) képletével. Legyen x≠0. Ekkor

$$\frac{\frac{1-\cos x}{x}-\frac{1}{4}\sin x-0}{x-0}=\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{\frac{1}{4}\sin x}{x}$$

Ha most $x \longrightarrow 0$, akkor az utolsó egyenl?ség után az els? tényez? és a második tag, mint nevezetes határérték az 1/2-hez tart, míg a második tag az 1/4-hez. Emiatt a határérték 1/4.