

Minden tételnek, csak egy bizonyítását kell megtanulni. A benne szereplő fogalmak definícióját ki kell tudni mondani, továbbá példákkal kell tudni illusztrálni, hogy az adott fogalomra van példa illetve ellenpélda. Ha valaki másmilyen bizonyítást szeretne elmondani, annak a következőkhöz kell tartania magát:

1. minden felhasznált tételt pontosan ki kell tudni mondani,
2. igazolni kell, hogy a felhasznált tétel feltételei az adott szituációban valóban fennállnak,
3. pontosan meg kell tudni mondani, hogy a felhasznált tételt az adott körülmények között milyen szereposztásban szándékozunk alkalmazni.

A QED azt jelenti, hogy ott vége a bizonyításnak.

Tartalomjegyzék

- 1 Bolzano-Weierstrass-tétel
 - ♦ 1.1 Heine-Borel-tétellel
 - ♦ 1.2 Csúcselemmel
- 2 Heine tétele
 - ♦ 2.1 Korlátos derivált
 - ♦ 2.2 Folytonosan kiterjeszthető függvény
- 3 Bolzano-tétel
- 4 Weierstrass tétele
- 5 A derivált szakadásai, Darboux-tétel
- 6 Lagrange-tétel
- 7 Newton-Leibniz-tétel

Bolzano-Weierstrass-tétel

Ebben a tételben a Bolzano-Weierstrass-tételt fogjuk bizonyítani. Két bizonyítást adunk, de elég csak az egyiket elmondani, azaz vagy a **Heine-Boreleset** vagy a **csúcselemeset**. Néhány tételt később a Heine-Borel-tételre fogjuk alapozni.

Heine-Borel-tétellel

Definíció Az $U \subset \mathbb{R}$ halmaz nyílt, ha minden $u \in U$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy az $(u - \delta, u + \delta)$ nyílt intervallum benne van U -ban.

Definíció Azt mondjuk, hogy a $K \subset \mathbb{R}$ halmaz *kompakt*, ha minden olyan esetben, amikor nyílt halmazok uniója lefedi, akkor ezek közül kiválasztható már véges sok nyílt halmaz is, melyeknek uniója még mindig lefedi (röviden: minden nyílt lefedésből kiválasztható véges részlefedés).

Példa. Az

$$\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cup \{0\}$$

halmaz kompakt, mert ha lefedi nyílt halmazok egy H halmaza, akkor már a 0-t is lefedi egy $U \in H$ nyílt halmaz, azaz van olyan $(-\delta, +\delta) \subset U$ nyílt intervallum, mely lefedi a 0-t. De minthogy $(1/n)$ a 0-hoz konvergál, ezért az $(-\delta, +\delta)$ -intervallumon kívül csak véges sok tagja van. Emiatt ha veszünk az ezen kívüli véges sok tagot lefedő véges sok H -beli nyílt halmazt és hozzávesszük U -t, akkor ezek már lefedik a halmazt.

Példa. A természetes számok halmaza nem kompakt, mert van olyan nyílt lefedése, melyből biztosan nem választható ki véges részlefedés. Ha ugyanis az n természetes számokat lefedjük az $(n-1/2, n+1/2)$ nyílt intervallumokkal, akkor ennek egyik véges része se fogja az összes természetes számot lefedni.

Tétel ? Heine?Borel-tétel ? Minden zárt és korlátos intervallum kompakt.

Bizonyítás. A Cantor-féle közösrésztételt fogjuk alkalmazni. Intervallumfelezéses eljárással fogunk definiálni egymásba skatulyázott intervallumok egy sorozatát, melyek hossza a 0-hoz tart.

Legyen az intervallum $[a, b]$. Legyen egy nyílt lefedése a H halmazrendszer.

Indirekten látjuk be: tegyük fel, hogy $[a, b]$ -nek nincs véges részlefedése. Osszuk $[a, b]$ -t két egyenlő részre, az $[a, c]$ és a $[c, b]$ zárt intervallumokra. Ekkor vagy az $[a, b]$

"http://wiki.math.bme.hubaloldali" http://wiki.math.bme.hu fele, vagy a

"http://wiki.math.bme.hujobboldali" http://wiki.math.bme.hu fele olyan, hogy nincs véges részlefedése, ugyanis, ha mindkettőnek lenne, akkor az $[a, b]$ -nek is lenne. Válasszunk ki a két félből most egy olyat, melynek *nincs* véges részlefedése. Osszuk ezt is két egyenlő részre. Az egyik félnek nincs véges részlefedése, ... folytassuk ezt az eljárást a végtelenségig. Ekkor kapunk egy olyan intervallumsorozatot, melynek következ? eleme mindig része a megelőzőnek $(I_{n+1} \subset I_n)$ és a hosszuk a feledés miatt a 0-hoz tart. Ekkor a Cantor-tétel miatt létezik a sorozatnak egyetlen közös eleme. Legyen ez u . u -t lefedí egy $U \in H$ nyílt halmaz, így egy $(u - \epsilon, u + \epsilon)$ nyílt intervallum is. De mivel az intervallumok hossza a 0-hoz tart, ezért van olyan n , hogy

$$I_n \text{ hossza} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ezt viszont benne van $(u - \epsilon, u + \epsilon)$ -ben, mert u benne van I_n -ben is. Azaz I_n -nak U véges (egyetlen elemből álló) részlefedése. De ez ellentmondás, mert (I_n) konstrukciója szerint egyetlen tagjának sincs véges részlefedése. QED

Tétel ? Bolzano?Weierstrass-tétel ? Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. I. Először belátjuk, hogy a sorozatnak van sűrűsödési pontja. Legyen (a_n) korlátos sorozat. Ekkor van olyan K szám, hogy minden n -re $a_n \in [-K, K]$. A $[-K, K]$ korlátos és zárt intervallumra fogjuk alkalmazni a Heine?Borel-tételt. Tegyük fel, hogy (a_n) -nek nincs sűrűsödési pontja. Ekkor egyik $u \in [-K, K]$ sem sűrűsödési pont, azaz az u -hoz található olyan $\epsilon_u > 0$ szám, hogy az u körüli $B_{\epsilon_u}(u) = (u - \epsilon_u, u + \epsilon_u)$ intervallumban csak véges sok tagja van a sorozatnak. Az

$$\{B_{\epsilon_u}(u) \mid u \in [-K, K]\}$$

halmazrendszer nyílt lefedése $[-K, K]$ -nak, tehát a Heine?Borel-tétel értelmében van véges részlefedése. De, ekkor azt kaptuk, hogy a véges sok olyan halmazzal lehet lefedni a teljes (a_n) -t, melyekben egyenként is csak véges sok tagja van (a_n) -nak. Ez ellentmondás, mert ebből az következne, hogy (a_n) -nek csak véges sok indexe van, ami nem igaz, mert (a_n) végtelen sorozat.

II. Másodszor kiválasztjuk az így adott sűrűsödési ponthoz konvergáló sorozatot. Legyen $k = 1 / \epsilon_k$. Ekkor minden k -ra:

$$\text{létezik } l > k, \text{ hogy } a_l \in (u - \delta_k, u + \delta_k)$$

Természetes számok egy nem üres halmazában van legkisebb elem, így legyen minden k -ra

$$n_k := \min\{l \mid a_l \in (u - \delta_k, u + \delta_k)\}$$

Ekkor az

$$(a_{n_k})$$

sorozat az u -hoz tart, mert minden k -ra

$$|a_{n_k} - u| < \delta_k \rightarrow 0$$

QED

Csúcselemmel

Először belátjuk, hogy minden sorozatból kiválasztható monoton részsorozat, majd belátjuk, hogy monoton-korlátos sorozat konvergens.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az (n_k) **indexsorozat**, ha természetes számokból áll és szigorúan monoton növekvő.

Példa. A (pozitív) prímszámok nagyság szerint sorba téve indexsorozatot alkotnak, míg az

$$n_k = 1 + k((-1)^k + 1)$$

sorozat nem.

Definíció. Ha (a_n) sorozat és (n_k) indexsorozat, akkor azt mondjuk, hogy a

$$k \mapsto a_{n_k}$$

összetett függvény az (a_n) sorozatnak az (n_k) indexsorozat által kiválasztott **részsorozata**.

Tétel ? Minden sorozatból kiválasztható monoton részsorozat.

Bizonyítás. Legyen (a_n) a sorozat. Azt mondjuk, hogy az n -edik tag *csúcselem*, ha

$$\text{minden } k > n \text{-ra } a_n > a_k.$$

Esetszétválasztással folytatjuk: vagy véges sok csúcselem van, vagy végtelen sok. Mindkét esetben belátjuk a kívánt sorozat létezését.

1. Tegyük fel, hogy *végtelen* sok csúcselem van. Ekkor minden k -ra

$$\text{létezik } l > k, \text{ hogy } a_l \text{ csúcselem.}$$

Természetes számok egy nemüres halmazában van legkisebb elem, így legyen minden k -ra

$$n_k = \min\{l > k \mid a_l \text{ csúcselem}\} \neq \emptyset$$

Ekkor

$$(a_{n_k})$$

monoton csökken, mert vagy következ? csúcselem választódik, és akkor csökken, vagy saját maga és akkor nem n?. (Megjegyezzük, hogy ha sorba állítanánk a csúcselemeket indexek szerint, akkor egy szigorúan monoton csökken? sorozat jönne létre; fent most nem teljesen ezt tettük.)

2. Tegyük fel, hogy *véges* sok csúcselem van. Ekkor létezik egy legnagyobb index? (a_{n_0}) csúcselem. Minden $k > 0$ -ra $n_0 + k$ már nem csúcselem, így a csúcselem definícióját tagadva:

$$\text{minden } k\text{-ra létezik } l > n_0 + k, \text{ hogy } a_{n_0+k} \leq a_l.$$

Rekurzívan definiálunk egy monoton növekv? sorozatot. Legyen

$$n_1 = n_0 + 1$$

Ha már definiált az n_k , akkor tudjuk, ez nem csúcselem, így legyen

$$n_{k+1} := \min\{l > n_k \mid a_{n_k} \leq a_l\} \text{ QED.}$$

Kérdés. Miért kell föltennünk az indexsorozat definíciójában, hogy az szigorúan monoton növeked? sorozat? Ugyanazt a fogalmat kapnánk-e, ha csak azt tennénk fel, hogy 1) monoton n?, 2) végtelenbe tart?

Tétel ? Korlátos, monoton sorozat konvergens.

Bizonyítás. Elég belátnunk, hogy korlátos, monoton növekv? (a_n) sorozat konvergens, mert monoton csökken? sorozat esetén a $(-a_n)$ sorozatra alkalmazva ezt az állítást, kapjuk, hogy (a_n) is konvergens.

Tegyük fel, hogy (a_n) monoton növekv? sorozat. Ekkor az értékkészlete korlátos, tehát a *felsőhatár-axióma* miatt van legkisebb fels? korlátja:

$$s := \sup \text{Ran}(a_n) \in \mathbf{R}$$

Definíció szerint belátjuk, hogy a sorozat konvergens és ehhez a számhoz tart. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor $s - \varepsilon$ már nem fels? korlát, bár s még az, azaz létezik N , hogy

$$s - \varepsilon < a_N \leq s$$

de mivel a sorozat monoton növekv?, azért minden $n > N$ -re

$$a_N \leq a_n$$

így minden $n > N$ -re

$$s - \varepsilon < a_n \leq s$$

s mivel ε tetszőleges volt, azért a sorozat konvergál az s-hez. QED

Feladat. Igazolja, hogy ha (a_n) felül?l nem korlátos, akkor van végtelenbe tartó részsorozata! (Pontosan adjon meg egy eljárást, mely egy ilyen részsorozat k -adik tagját produkálja és lássa be róla, hogy valóban végtelenbe tartó sorozatról van szó.)

Feladat. Mi a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv ("http://wiki.math.bme.husorozatokkal megfogalmazott vagy Heine-féle függvényhatárérték definíció" http://wiki.math.bme.hu)? Számítsa ki az alábbi határérték értékét (ha van)! Hol használjuk a számítás közben a L'Hospital szabályt?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} \cdot \operatorname{arctg} \frac{n!}{n^n}$$

Feladat

$$\limsup_{n \in \mathbb{Z}^+} \left(-1 + \frac{1}{n} \right)^n = ?$$

Heine tétele

Definíció ? Egyenletesen folytonosnak mondunk egy $f: H \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt a $H \subset \mathbf{R}$ halmazon, ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in H \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Tétel ? Heine-tétel ? Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. A Heine-Borel-tételt fogjuk használni. Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény. Megadunk $[a, b]$ -nek egy nyílt lefedését. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor a pontbeli folytonosság definíciója szerint minden egyes $u \in [a, b]$ ponthoz létezik olyan $\delta_u > 0$ pozitív szám, hogy:

$$f(B_{\delta_u}(u)) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(u))$$

azaz minden x -re, ha $|x - u| < \delta_u$ akkor $|f(x) - f(u)| < \varepsilon/2$. Legyen tehát :

$$H = \{B_{\frac{\delta_u}{2}}(u) \mid u \in [a, b]\}$$

egy nyílt lefedése $[a, b]$ -nek. A Heine-Borel-tétel szerint létezik véges eleme is, melyek még mindig lefedik $[a, b]$ -t, azaz van $V \subset [a, b]$ véges ponthalmaz, hogy

$$K = \{B_{\frac{\delta_u}{2}}(u) \mid u \in V\}$$

A véges sok $\delta_u/2$ közül válasszuk a minimálisat:

$$\delta := \min\left\{\frac{\delta_u}{2} \mid u \in V\right\}$$

Minden $x, y \in H$ -ra, ha $|x - y| < \delta$, akkor egyfelől az x benne van egy $u \in V$ középpontú K -beli intervallumban, másrészt:

$$|y - u| \leq |y - x| + |x - u| < \delta + \frac{\delta_u}{2} \leq \frac{\delta_u}{2} + \frac{\delta_u}{2} = \delta_u$$

Ezért a folytonosság miatt:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(u)| + |f(u) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

QED

Egyenletes folytonosságra bizonyos esetekben következtethetünk nem csak zárt és korlátos esetben is.

Korlátos derivált

Ha az f intervallumon értelmezett differenciálható függvény korlátos deriválttal rendelkezik, akkor a Lagrange-féle középértéktétel miatt f egyenletesen folytonos az értelmezési tartományán. Ugyanis legyen K olyan pozitív szám, hogy minden $x \in \text{Dom}(f)$ -re:

$$|f'(x)| \leq K$$

Ha $\delta > 0$ és $\delta := 1/K$, akkor minden $x, y \in \text{Dom}(f)$ -re, ha $|x - y| < \delta$, létezik ξ az x és az y között, hogy azzal:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| < K \cdot \delta = \varepsilon$$

Példa. Az

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

egyenletesen folytonos az $[1, +\infty)$ halmazon.

Ugyanis, itt korlátos a deriváltja:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Ezért ha $x \in [1, +\infty)$, akkor

$$\left| -\frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} \leq 1$$

Folytonosan kiterjeszthető függvény

Ha I korlátos, nyílt intervallum és az $f|_I$ -n folytonos függvénynek létezik véges határértéke az I végpontjaiban, akkor világos, hogy az I lezártja már korlátos és zárt és az f folytonos kiterjesztésére alkalmazható a Heine tétele, amiből következik, hogy f is függvény egyenletesen folytonos (hiszen ugyanaz a δ jó lesz az f -hez is, mint a kiterjesztéséhez).

Példa. A $(0,1)$ -en értelmezett

$$f(x) = \sqrt{x}$$

egyenletesen folytonos a $(0,1)$ intervallumon.

Ugyanis, f folytonosan kiterjed a $[0,1]$ zárra.

Ennél a példánál a korlátos deriváltra nem is hivatkozhattunk volna, mert

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

nem is korlátos (0,1)-en.

Megjegyezzük, hogy ez az állítás akkor is érvényben marad, ha azt tesszük fel, hogy I akármilyen intervallum, f folytonos és az értelmezési tartománya határpontjaiban létezik és véges a határértéke.

Továbbá bizonyos értelemben ennek az állításnak a megfordítása is igaz. Ha f egyenletesen folytonos, akkor folytonosan (sőt egyenletesen folytonosan) kiterjeszthet? az I lezártjára.

Feladat. Igazolja, hogy az $f(x) = \sin(\sqrt[3]{x})$ függvény egyenletesen folytonos a teljes $\mathbf{R}$ -en! (korlátos derivált és Heine) Deriválható-e f a nullában? (nem)

Bolzano-tétel

Tétel ? Bolzano-tétel ? Intervallumon értelmezett, negatív és pozitív értékeket is felvev? folytonos függvénynek van zérushelye.

Bizonyítás. A Heine-tételt alkalmazzuk. Az általánosság megszorítása nélkül feltehet?, hogy a tételbeli f folytonos függvény egy $[a,b]$ intervallum a pontjában negatív, a b pontjában pozitív. (Ellenkez? esetben alkalmazzuk a $-f$ függvényre.)

El?ször is rámutatunk a majdani zérushelyre (majd belátjuk, hogy ez valóban zérushely). $f(a)$ negatív, ezért vegyük a legtávolabbi lehetséges határát annak a halmaznak, ahol f negatív lehet:

$$x_0 = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$$

(éppenséggel vehettük volna a legkorábbi pontot ahol f már pozitív lehet, az $\inf\{x \in [a,b] \mid f(x) > 0\}$), hiszen reménykedünk abban, hogy egy utolsó negatív tartomány után a függvény a folytonosság miatt "http://wiki.math.bme.hufelbukkan" http://wiki.math.bme.hu és átmetszi az x tengelyt. Belátjuk, hogy minden pozitív ϵ számra $|f(x_0) - 0| < \epsilon$, ami miatt ekkor $f(x_0) = 0$ lesz.

Legyen $\epsilon > 0$ és legyen δ az a pozitív szám, melyet az $\epsilon/2$ számhoz ad a Heine-tétel (illetve f egyenletes folytonossága). Vegyük $[a,b]$ -nek egy δ -nál kisebb finomságú felosztását (mint az integrálnál). x_0 a felosztás egy $[c,d]$ intervallumában van, és feltehet?, hogy a belsejében, mert ellenkez? esetben finomíthatunk úgy a felosztáson, hogy mégis így álljon a helyzet.

Ekkor egyrészt

$$f(d) \geq 0$$

mert ha $f(d) < 0$ lenne, akkor x_0 nem lenne a $H = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$ halmaz fels? határa.

Másrészt biztos van a $(c, x_0]$ intervallumban olyan e szám, melyre $f(e) < 0$, mert x_0 minden baloldali környezetében van H -beli elem.

Tehát felírhatjuk:

$$f(e) < 0 \leq f(d)$$

s mivel

$$|f(d) - f(e)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ezért

$$0 \leq f(d) < \frac{\varepsilon}{2}$$

vagyis ezt felhasználva:

$$|f(x_0)| = |f(x_0) - f(d) + f(d)| \leq |f(x_0) - f(d)| + |f(d)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

QED

Feladat. Igazoljuk, hogy ha f az I intervallumon értelmezett folytonos függvény, és

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

véges sok szám az intervallumból, akkor létezik olyan $[a_1, a_n]$, hogy

$$f(\xi) = \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n}$$

Használjuk fel, hogy a Bolzano-tételt még oly módon is szokás kimondani, hogy

intervallumon értelmezett folytonos függvény két függvényértéke között minden értéket fölvesz

melyet Darboux-tulajdonságnak neveznek. A Bolzano-tétel lényegében azt mondja ki, hogy az intervallumon folytonos függvények Darboux-tulajdonságúak. Megjegyezzük, hogy a Darboux-tétel pedig azt mondja ki, hogy az intervallumon differenciálható függvények deriváltfüggvénye Darboux-tulajdonságú.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ folytonos függvény, akkor létezik olyan $[a, b]$ pont, hogy

$$f(\xi) = \xi$$

(az ilyen pontot az f *fixpontjának* nevezzük).

Feladat. Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^3 + x - \sin x$ függvénynek pontosan egy zérushelye van! Pozitív-e mindenhol a deriváltja? Szigorúan monoton növekvő-e?

Weierstrass tétele

Tétel ? *Weierstrass-féle minimum-maximum-elv ?* Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi abszolút minimumát és maximumát.

Bizonyítás. A bizonyítás két részből fog állni. Először belátjuk, hogy minden ilyen függvény korlátos, majd belátjuk, hogy ekkor a maximum és minimum felvétetik.

I. Legyen $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos. A Heine tétele miatt az $\epsilon=1$ -hez létezik olyan δ az egyenletes folytonosság definíciójában rögzített megfelelő tulajdonsággal. legyen δ egy kicsit kisebb, mint δ (mondjuk legyen δ $(0, \delta)$ rögzített). Vegyük az $[a,b]$ egy δ finomságú intervallum-felosztását (mint az integrálnál). Ekkor minden ilyen I_n részintervallumra igaz, hogy például ha a_n az intervallum bal végpontja, akkor

$$f(I_n) \subseteq B_\epsilon(f(a_n))$$

azaz az intervallum képe az $f(a_n)$ sugarú környezetébe esik. Tehát a függvény értékkészlete lefedhető véges sok egységsugarú intervallummal. Ez viszont azt jelenti, hogy a függvény korlátos, mert alsó korlátja lesz a legalsó lefedő intervallum alsó végpontja, és felső korlátja a legfelső lefedő intervallum felső végpontja.

II. Belátjuk, hogy f felveszi maximumát (a minimum felvételét ebből úgy látjuk be hogy a most igazolandó tételt alkalmazzuk a $-f$ függvényre). Indirekt módon tegyük fel, hogy f nem veszi fel maximumát, ennek ellenére a korlátossága miatt a

$$S := \sup \text{Ran}(f)$$

véges. Azaz tulajdonképpen azt tesszük fel, hogy

$$S \notin \text{Ran}(f)$$

Definiálunk egy $[a,b]$ -n folytonos függvényt.

$$g(x) = \frac{1}{S - f(x)} \quad (x \in [a, b])$$

A függvény valóban $[a,b]$ -n értelmezett, hiszen a nevező az indirekt feltevés miatt sehol sem lesz nulla. Ezen kívül g folytonos, mert folytonos függvényekből a folytonosságot megőrző módon lett összetéve. Tehát g miatt *korlátos*. De a f a $\sup$ -hoz végtelen közel kerül, azaz ebből ellentmondást csíholhatunk.

Valóban, közelítsük az S -et a egy függvényérték sorozattal. Ilyen sorozat van, mert ellenkező esetben S nem lenne f felső határa (csak korlátja). Van tehát olyan nem feltétlenül konvergens (x_n) sorozat, mely elemei függvényértékeinek sorozata az S -hez tart:

$$f(x_n) \rightarrow S$$

Ekkor

$$S - f(x_n) \rightarrow 0$$

mégpedig a pozitívak felől és éppen ezért

$$\frac{1}{S - f(x_n)} \rightarrow +\infty$$

ami ellentmond annak, hogy g korlátos. QED

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos és létezik a két végtelenben a határértéke és

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$$

akkor f felveszi abszolút minimumát.

A derivált szakadásai, Darboux-tétel

Intervallumon deriválható függvény deriváltjának nem lehet megszüntethető szakadása. (Ellenben lehet korlátos másodfajú és a végtelen másodfajú szakadása.)

Állítás. Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos a -ban, differenciálható a nyíltan és létezik a derivált határértéke a -ban és ez véges szám, akkor f -nek létezik a deriváltja a -ban (és a deriváltja a $\lim_a f'$ szám).

Bizonyítás. Ez az első L'Hospital-tétel következménye. Tekintsük a különbségi hányados függvényt, legyen a L'H-beli számláló az $x \mapsto f(x) - f(a)$, a nevező az $x \mapsto x - a$. Világos, hogy a -ban $0/0$ alakú, így alkalmazható a L'H-szabály. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

azaz létezik a pontbeli derivált és ez a derivált határértéke. QED

Kérdés: hol használtuk fel, hogy az f függvény folytonos?

A deriváltfüggvénynek nem lehet ugrása sem:

Tétel ? Darboux-tétel ? Ha $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható, akkor f' Darboux-tulajdonságú (két deriváltérték között a deriváltfüggvény minden értéket fölvesz).

Bizonyítás. Legyen $[a, b] \subset I$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $f'(a) < f'(b)$ és $f'(a) < m < f'(b)$ valamely tetszőlegesen rögzített m -re ($f'(b) < f'(a)$ esetén ugyanis a $(-f)$ függvényre teljesülni fog $(-f)'(a) < (-f)'(b)$ és ebből már következik f -re is a tétel). Belátjuk, hogy van olyan (a, b) , hogy $f'(c) = m$.
Transzformáljuk el a függvényt, vonjuk ki belőle az $x \mapsto mx$ lineárist:

$$g(x) := f(x) - mx, \quad x \in [a, b]$$

g differenciálható, és $g'(x) = f'(x) - m$, tehát g olyan, hogy tetszőleges x -re:

$$g'(x) = 0 \iff f'(x) = m$$

A feladat tehát, hogy keressünk zérushelyet g' -nek. Ehhez elég, ha találunk g értelmezési tartományának belsejében szélsőértéket, mert akkor a Fermat-féle szélsőértéktétel miatt ott a derivált nulla lesz. [A Fermat-féle szélsőérték tétel azt mondja ki, hogy ha egy függvénynek az értelmezési tartománya egy belső pontjában szélsőértéke van és ott deriválható, akkor a függvény deriváltja ott nulla.] Az $[a, b]$ zártan a folytonos g a Weierstrass-tétel miatt felveszi a szélsőértékeit. Tehát készen vagyunk, amennyiben létezik szélsőérték az (a, b) nyíltan. A továbbiakban ezt bizonyítjuk.

Vizsgáljuk a g -t az a -ban. Mivel a feltevés szerint $f'(a) < m$, ezért $f'(a) - m < 0$ és

$$g'(a) = f'(a) - m < 0,$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$$

Ekkor természetesen egy valamely $\delta > 0$ -ra minden $x \in (a, a + \delta)$ -re

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0$$

és innen

$$g(x) < g(a)$$

vagyis a -ban nem lehet g -nek minimuma.

Ha $g(b)$ -t nézzük, akkor $m < f'(b)$, ezért $0 < f'(b) - m$ és

$$g'(b) = f'(b) - m > 0,$$

ezért valamely $\delta > 0$ számmal ha $x \in (b - \delta, b)$, akkor $x - b < 0$ és

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} &> 0 \\ \frac{g(x) - g(b)}{x - b} &> 0 \quad / \cdot (x - b) \quad (< 0) \\ g(x) &< g(b) \end{aligned}$$

azaz b -ben sem lehet minimum. Viszont ez azt jelenti, hogy a Weierstrass-tétel által garantált minimum csak az (a, b) nyíltban lehet. QED

Feladat. Adjunk példát olyan deriválható függvényre, melynek a deriváltja egy pontban korlátos módon és olyanra, mely nem korlátos módon szakad.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy intervallumon differenciálható függvény deriváltja sehol sem nulla, akkor a függvény szigorúan monoton.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható és deriváltja sehol sem nulla, akkor invertálható és inverzének deriváltja

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ ha } x \in I.$$

Feladat. Adjuk meg az $f(x) = \sin(x)$ függvényre az

$$(f^{-1})'(f(x))$$

kifejezést és ebből a $y=f(x)$ helyen az inverz deriváltját!

Lagrange-tétel

Tétel Lagrange-féle közéértéktétel Legyen $f: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható függvény. Ekkor létezik olyan (a,b) , hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Ugyanis, Legyen

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Olyan g differenciálható függvény adunk meg, melynek pontosan olyan x helyen van nulla deriváltja, ahol $f'(x)=m$. Transzformáljuk el az f függvényt az $l(x)=m(x-a)$ függvénnyel:

$$g(x) = f(x) - m(x - a) \quad (x \in [a, b])$$

Ez a függvény egyrészt differenciálható, mert differenciálhatókból van összetéve az azt meg?rz? módon (speciel, ekkor folytonos is). Másrészt: $g(a)=f(a)=g(b)$. Harmadrészt tetsz?leges $x \in [a,b]$ -re

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = m$$

A továbbiakban belátjuk, hogy g -nek van az (a,b) nyílton széls?értéke.

g a Weierstrass-tétel miatt felveszi mindkét típusú extrémumát. Innen esetszétválasztással megyünk tovább.

1) Ha $\max(g)=f(a)$ és $\min(g)=f(a)$, akkor a függvény konstans, így minden pontja széls?érték.

2) Ha $\max(g)$ és $\min(g)$ közül bármelyik nem $f(a)$, akkor ez a valamelyik nem lehet sem a -ban, sem b -ben, mert ott a függvényérték $f(a)$, belül kell, hogy legyen ez a széls?érték.

Tehát az (a,b) -ben van széls?értékhely, mondjuk ξ , amire a Fermat-féle széls?értéktételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$g'(\xi) = 0$$

tehát

$$f'(\xi) = m$$

QED

Feladat. Igazoljuk, hogy intervallumon differenciálható függvény pontosan akkor monoton, ha a deriváltja mindenhol vagy nemnegatív, vagy nempozitív.

Newton?Leibniz-tétel

A fogalmakra és konkrét példákra vonatkozóan lásd még az utolsó el?tti gyakorlat wiki-lapját.

A tételt az analízis második alaptételének is nevezik. Ehhez persze két jelentős fogalmat kell felelevenítenünk. Az egyik a primitív függvény, a másik a Riemann-integrálhatóság fogalma.

Egy $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum *Riemann-felosztásának* nevezzük az olyan függvényt, mely az $[a,b]$ egy véges intervallumokra történő felosztásán van értelmezve és minden intervallumhoz egy benne lévő számot rendel. Tehát, ha

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

számok, akkor egy Riemann-felbontás az

$$\eta : \{[a, x_1], \dots, [x_{n-1}, b]\} \rightarrow [a, b], \quad \eta([x_i, x_{i+1}]) \in [x_i, x_{i+1}]$$

függvény. Ez $\delta > 0$ finomságú, ha a leghosszabb intervalluma is rövidebb mint δ . Az $[a,b]$ intervallum finomságú Reimann-felosztásainak halmazát $RF_\delta[a,b]$ jelöli.

Az $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvény egy η felbontásához tartozó *Riemann-közelítő összege* a

$$\sigma^f(\eta) = \sum_{i=1}^n f(\eta([x_{i-1}, x_i])) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy a korlátos és zárt intervallumon értelmezett $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvény *Riemann-integrálható* és integrálja az A valós szám, ha

$$\text{minden } \delta > 0\text{-hoz létezik } \delta > 0, \text{ hogy minden } \eta \in RF_\delta[a,b]\text{-re:}$$

$$|\sigma^f(\eta) - A| < \varepsilon$$

A Riemann-integrálható függvények halmazát az adott intervallumon $R[a,b]$ jelöli.

A másik a primitív függvény fogalma:

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $F:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható függvény primitív függvénye az $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvénynek, ha

$$F' = f$$

Newton-Leibniz-tétel. Legyen $f \in R[a,b]$ és létezzen f -nek primitív függvénye és pedig az F . Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy ha A -val jelöljük az integrál értékét, akkor A minden számnál közelebb van az $F(b)-F(a)$ értékhez. Legyen $\varepsilon > 0$. Az integrálhatóság definíciójából tudjuk, hogy az ε számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $\eta \in RF_\delta[a,b]$ felosztásra teljesül, hogy

$$|A - \sum_{I \in \text{Dom}(\eta)} f(\eta(I))|I|| < \varepsilon$$

Tekintsünk egy δ -nál finomabb intervallumfelbontást:

$$\{[a, x_1], \dots, [x_{n-1}, b]\}$$

függvényt! Ekkor a részintervallumokra felírható a Lagrange-tétel és minden részintervallumra létezik olyan

$$\eta([x_{i-1}, x_i]) \in [x_{i-1}, x_i]$$

szám, hogy az alábbi teleszkopikus összeg el?áll integrálközelít? összeg alakjában:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (F(b) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + (F(x_{n-2}) - F(x_{n-3})) + \dots + (F(x_1) - F(a)) \\ &= F'(\eta([x_{n-1}, x_n]))(x_n - x_{n-1}) + \dots + F'(\eta([x_1, x_0]))(x_1 - x_0) = \sum_{i=1}^n f(\eta([x_{i-1}, x_i]))(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

De az

$$[x_{i-1}, x_i] \mapsto \eta([x_{i-1}, x_i])$$

függvény egy δ -nál finomabb Riemann-közelít?összeg (hiszen a intervallumokat δ -nál rövidebbre választottuk), így ennek eltérése az integráltól kisebb mint ε :

$$|A - (F(b) - F(a))| = |A - \sum_{i=1}^n f(\eta([x_{i-1}, x_i]))(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon$$

azaz igazoltuk a N?L-formulát.

Feladat Igazoljuk a definíció alapján, hogy az $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(0)=0$, $f(x)=1/x$, ha $x \neq 0$ függvény és a Dirichlet-függvény ($\text{Dir}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$; 1, ha x racionális, 0, ha x irracionális) nem Riemann-integrálható.

Feladat $R[a, b]$ az $[a, b]$ -n Riemann-integrálható függvények halmaza, $B[a, b]$ az $[a, b]$ -n korlátos függvények halmaza, $M[a, b]$ az $[a, b]$ -n monoton függvények halmaza, $C[a, b]$ az $[a, b]$ -n a folytonos függvények halmaza. Tudjuk, hogy

- a) $C[a, b] \subset R[a, b]$
- b) $M[a, b] \subset R[a, b]$ (mert monoton függvénynek csak megszámlálható sok szakadása van és megszámlálható halmaz nullmérték?)
- c) $R[a, b] \subset B[a, b]$.

Igazoljuk, hogy ezek a tartalmazások fordítva nem m?ködnek, azaz mondjuk mindegyik megfordítására ellenpéldát!

Feladat Végezzük el az integrálokat!

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{\sqrt{x} (1 - \sin^2(\sqrt{x} + 1000))} dx \\ &\int \text{ch } x \cdot \cos x dx \\ &\int 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx \end{aligned}$$