Tartalomjegyzék

- 1 Halmazok
- 2 Geometria vektorokkal
- 3 Sík és egyenes
- 4 Komplex számok
- 5 Sorozatok
- 6 Függvényvizsgálat

Halmazok

1. **Egyszer?sítse az alábbi kifejezéseket!**
   1. $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=?$
   2. $(A\cap B)\cup C=?$, ha $A\subseteq C$.
2. **Oldja meg az alábbi halmazegyenleteket, *X*-re!**
   1. $(A-X)\cup B=X$
   2. $A-X=X-A$
3. **Igazolja minden A, B, C halmazra, hogy**
   1. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C\;\Leftrightarrow\;A\subseteq C$
4. **Igazolja minden *B* halmazra, $(A_i)_{i\in I}$ és $(A_{(i,j)})_{(i,j)\in I\times J}$ halmazrendszerre, hogy**
   1. $B\setminus\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\bigcap\limits_{i\in I}B\setminus A_i$
   2. $\bigcup\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J}A_{(i,j)}\subseteq\bigcap\limits_{j\in J}\bigcup\limits_{i\in I}A_{(i,j)}$
   3. $B\cap\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\bigcup\limits_{i\in I}B\cap A_i$

Megoldás.

1.1. Legyen *D* a feladatban szerepl? halmaz és legyen *U* = *A* U *B* U *C* a komplementerképzés alaphalmaza! Emeljünk ki *A*-t!

$$D=A\cap((B\cap C)\cup(B\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap C)\cup(\overline{B}\cap\overline{C}))=$$

A második tényez? els? két tagjából kiemelhetünk *B*-t a második két tagjából *B* komplementert:

$$=A\cap((B\cap(C\cup\overline{C}))\cup(\overline{B}\cap(C\cup\overline{C})))=$$

ekkor a halmaz és komplementere kiadja *U*-t, így:

$$=A\cap((B\cap U)\cup(\overline{B}\cap U))=A\cap(B\cup\overline{B})=A\cap U=A$$

Tehát *D* = *A*.

Vagy Boole-algebrai formalizmusban:

$$d = abc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + a\overline{bc} = a(bc + \overline{b}c + b\overline{c} + \overline{bc}) = a((b+\overline{b})c + (b+\overline{b})\overline{c}) =$$
$$= a(1c + 1\overline{c}) = a(c+\overline{c}) = a \cdot 1 = a$$

1.2.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = C \cap (B \cup C) = C$$

az elnyelési tulajdonság miatt és mert *A*   *C* pontosan azt jelenti, hogy *A* U *C* = *C*.

2.1. Legyen a komplementerképzés univerzuma U. Tegyük fel, hogy van megoldás. Eltünik az *X* komplementer a bal oldalról, ha mindkét oldalt elmetszük *X*-szel:

$$\begin{array}{ccc}
(A - X) \cup B & = & X \\
(A \cap \overline{X}) \cup B & = & X \\
((A \cap \overline{X}) \cup B) \cap X & = & X \cap X \\
(A \cap \overline{X} \cap X) \cup (B \cap X) & = & X \\
(A \cap \emptyset) \cup (B \cap X) & = & X \\
B \cap X & = & X
\end{array}$$

ez utóbbi pontosan azt jelenti, hogy *X*   *B*. Emellett a feltétel mellett B-vel a baloldalon "http://wiki.math.bme.hubeuniózva"http://wiki.math.bme.hu:

$$[\ X = \ ] \qquad (A\cap\overline{X})\cup B = (A\cup B)\cap(\overline{X}\cup B) \supseteq (A\cup B)\cap(\overline{X}\cup X) = (A\cup B)\cap U = A\cup B$$

amib?l következik, hogy *B*   *X* és *A*   *X*. Ez azt jelenti, hogy ha van megoldás, akkor az egyértelm? éspedig

$$X = B$$

Most vizsgáljuk meg a megoldhatóság feltételét. Azt kaptuk, hogy ha van megoldás, akkor *A*   *X* = *B*, vagyis

$$A \subseteq B$$

De ez elégséges feltétele is a megoldhatóságnak, ugyanis ekkor az *X* = *B* helyettesítés kielégíti az egyenletet:

$$(A \cap \overline{B}) \cup B = \emptyset \cup B = B$$

2.2.

$$A - X = X - A$$

vagyis

$$A \cap \overline{X} = X \cap \overline{A}$$

Ha van megoldás és bemetszünk mindkét oldalon *A*-val, akkor

$$A \cap A \cap \overline{X} = X \cap \overline{A} \cap A$$
$$A \cap \overline{X} = \emptyset$$

azaz *A* *X*, de az egyenlet *szimmetrikus* az *A* és az *X* felcserélésére, ezért *X* *A* is teljesül, amib?l *X* = *A*, ha van megoldás. Márpedig az egyenletet az *X* = *A* kielégíti.

3.

Geometria vektorokkal

1. Igazoljuk, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást!

Mo. Legyen egy csúcsból kiinduló két oldalvektor **a** és **b**. Az átlók pontjai:

$$\mathbf{r}(\lambda) = \lambda.(\mathbf{a}+\mathbf{b}),\ \lambda \in [0,1]$$
$$\mathbf{r}(\mu) = \mathbf{a}+\mu.(\mathbf{b}-\mathbf{a}),\ \mu \in [0,1]$$

Világos, hogy az átlók felezéspontjai a =μ=1/2 értékeknél vannak. Ezek a pontok pedig egybeesnek, hisz

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

2. Igazoljuk, hogy ha a kezd?pontot a háromszög körül írható körének középpontjában veszük föl, akkor onnan felírva a csúcsokba mutató **a**, **b** és **c** vektorok **m = a + b + c** összege a magasságpont.

Mo. **m** - **a** mer?leges a szemben fekv? oldallal, hisz:

$$(\mathbf{c}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{m}-\mathbf{a}) = (\mathbf{c}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{b}^2-\mathbf{c}^2 = R^2-R^2 = 0$$

m - **a** tehát irányvektora egy magasságvonalnak, ugyanígy **m** - **b** és **m** - **c** is. Emiatt a magasságegyenesek:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}+t.(\mathbf{m}-\mathbf{a})$$
$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{b}+s.(\mathbf{m}-\mathbf{b})$$
$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{b}+u.(\mathbf{m}-\mathbf{b})$$

De ezek egy pontban találkoznak, az **m**-ben.

Sík és egyenes

Van-e olyan sík, mely tartalmazza az

$$e: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+3t \end{cases}$$ illetve $$f: \begin{cases} x = 3+4t' \\ y = 1-2t' \\ z = 1+6t' \end{cases}$$

egyeneseket?

Komplex számok

1. **Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!**
   $$z^8 - 3z^4 + 4 = 0$$
2. **Adja meg a következ? kifejezés értékét algebrai alakban!**

$$\frac{1}{2^{10}}\left(\frac{1}{i^5}+i^{2008}\right)^{20}$$

Megoldás.

1. $w = z^4$ új ismeretlennel:

$$w^2 - 3w - 4 = 0$$

ami a megoldóképlet szerint:

$$w_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} =$$

ahol a négyzetgyököt a komplex kétérték? értelemben kell venni.

$$= \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Ezeknek könny? el?állítani a negyedik gyökeiket. Az abszolút értékek:

$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ és 1,

így

$$z_{1234} = \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\cdot i$$
$$z_{5678} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2.

$$\frac{1}{2^{10}}\left(\frac{1}{i^5}+i^{2008}\right)^{20} = \frac{1}{2^{10}}(i+1)^{20} = \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^{20} =$$
$$= (\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))^{20} = \cos(5\pi) + i\sin(5\pi) =$$
$$= \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

Sorozatok

1. Igazak-e a következ? kijelentések?
    1. Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.
    2. Ha egy sorozat monoton és van konvergens részsorozata, akkor konvergens.
    3. Ha egy sorozat divergens, akkor az (1/n)-nel vett szorzata konvergens.
    4. Ha egy sorozat felülr?l nem korlátos, akkor nincs konvergens részsorozata.
    5. Ha egy sorozat a + végtelenbe tart, akkor van a + végtelenhez tartó részsorozata.
    6. Ha egy konvergens sorozat minden tagja pozitív, akkor a határértéke is pozitív.
    7. Ha ($a_{n+1} - a_n$) nullsorozat, akkor (a_n) konvergens.
2. Mennyi?

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{(3-\frac{2}{n})^n}{3^n}$$
2. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - 5^{n-5}}{5^n - 5n}$$

3. Konvergens-e?
   1. $a_n = n^n$ esetén $\frac{a_{n+1}}{a_n}$
   2. $a_n = 2^n + n^2$ esetén $\sqrt{a_n}$

Függvényvizsgálat

Vizsgáljuk meg monotonitás és széls?érték szempontjából.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + e^{\frac{1}{x}}}$$

b)

$$f'(x) = \frac{-2x + e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{(x^2 + e^{\frac{1}{x}})^2}$$

zh: hány megoldása van az

$$2x^3 = e^{\frac{1}{x}}$$

egyenletnek? x pozitív,

$$g(x) = 2x^3 - e^{\frac{1}{x}}$$

deriváltja pozitív, tehát szig. mon n?, azaz legfeljebb csak egy megoldás van. Bolzano-tételb?l köv., hogy van megoldás. Legyen ez x_M. El?jele: el?tte +, utána -. Negatívokra +.