Tartalomjegyzék

Komplex számok

Algebrai alak

1. Oldja meg a komplex számok körében az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{2}\frac{|z|}{z} = 1 - i, \qquad \mathbf{C} \ni z = ?$$

Mo. Világos, hogy a z = 0-t kizárhatjuk.

Írjuk fel az ismeretlent algebrai alakban: $z = a + b$ i

$$\sqrt{2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+bi} = 1 - i$$
$$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} = (1-i)(a+bi)$$
$$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} = a + bi + b - ai$$

Két komplex szám pontosan akkor egyenl?, ha valós és képzetes részeik egyenl?k.

1. $\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} = a + b$
2. $0 = b - a$

azaz $a = b$ és

$$2(a^2 + a^2) = (a + a)^2$$
$$4a^2 = 4a^2$$
$a \in \mathbf{R}$, $b = a \neq 0$

2. Mely komplex számok tesznek egyszerre eleget az alábbi egyenleteknek?

$$z + \overline{z} = -2,$$
$$|z|z = 2\sqrt{3}i - 2, \qquad \mathbf{C} \ni z = ?$$

Mo. Írjuk fel az ismeretlent algebrai alakban: $z = a + b$ i

$$a+bi+a-bi=-2$$
$$\sqrt{a^2+b^2}(a+bi)=2\sqrt{3}i-2$$

$$a=-1$$
$$-\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+b^2}bi=2\sqrt{3}i-2$$
$$-\sqrt{1+b^2}=-2$$

$$1+b^2=4$$
$$b=\pm\sqrt{3}$$

de a második egyenletb?l $b > 0$, így

$$z=-1+\sqrt{3}i$$

3. Mely komplex számok tesznek eleget az alábbi egyenletnek?

$$z\overline{z}=z^3,\qquad \mathbf{C}\ni z=?$$

Mo. $z = 0$ megoldás. Ha z nem nulla, akkor

$$\overline{z}=z^2$$

$z = a + b$ i-vel:

$$a-bi=a^2+2abi-b^2$$

$$-b=2ab$$
$$a=a^2-b^2$$

Innen $a = -1/2$,

$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-b^2$$
$$b^2=\frac{3}{4}$$
$$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Trigonomertikus alak

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^4=-z,\qquad \mathbf{C}\ni z=?$$

Mo. $z = 0$ megoldás. Ha z nem nulla, akkor

$$z^3=-1$$

Egyrészt $z = -1$, másrészt egységhosszúságú komplex számok a megoldások, hisz

$$|z|^3 = 1$$

Grafikusan:

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

5. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^8 - 3z^4 + 4 = 0$$

Mo. $w = z^4$ új ismeretlennel:

$$w^2 - 3w - 4 = 0$$

ami a megoldóképlet szerint:

$$w_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} =$$

ahol a négyzetgyököt a komplex kétérték? értelemben kell venni.

$$= \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Ezeknek könny? el?állítani a negyedik gyökeiket. Az abszolút értékek:

$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ és 1,

így

$$z_{1234} = \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2} \cdot i$$
$$z_{5678} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i, \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

6. Adja meg a következ? kifejezés értékét algebrai alakban!

$$\frac{1}{2^{10}} \left(\frac{1}{i^5} + i^{2008} \right)^{20}$$

Mo.

$$\frac{1}{2^{10}} \left(\frac{1}{i^5} + i^{2008} \right)^{20} = \frac{1}{2^{10}} (i+1)^{20} = \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}} \right)^{20} =$$
$$= (\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))^{20} = \cos(5\pi) + i\sin(5\pi) =$$
$$= \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

Vektoralgebra

6. Igazoljuk, hogy a derékszög? háromszög derékszög? csúcsát tükrözve a háromszög Thalész-körén lesz.

Mo. A Thalész-kör középpontjából rendere mutassanak a csúcsokba az **a**, **b**, **c** vektorok. Persze **a** = -**b** és |**a**| = |**b**| = |**c**| = *R*.

$$\begin{aligned}&(\lambda\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=0\\&\lambda\mathbf{a}^2-\mathbf{ac}=0\\&\lambda=\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{a}^2}\end{aligned}$$

Kell:

$$\begin{aligned}&(\lambda.\mathbf{a}+\lambda.\mathbf{a}-\mathbf{c})^2=R^2\\&(\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{a}^2}.\mathbf{a}+\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{a}^2}.\mathbf{a}-\mathbf{c})^2=(2\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{a}^2}.\mathbf{a}-\mathbf{c})^2=4\frac{(\mathbf{ac})^2}{\mathbf{a}^4}\mathbf{a}^2-4\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{a}^2}.\mathbf{ac}+\mathbf{c}^2=\\&=|\mathbf{c}|^2=R^2\end{aligned}$$

Halmazok

7. $((A\cap B)\cup D)\cap C=?$, ha $A\subseteq C\subseteq D$.

Mo. $((A\cap B)\cup D)\cap C=(A\cap B\cap C)\cup(D\cap C)=(A\cap B)\cup C=C$,

8. Oldja meg az alábbi halmazegyenleteket, *X*-re!

$$(A-X)\cup B=X$$

Mo. Legyen a komplementerképzés univerzuma U. Tegyük fel, hogy van megoldás. Eltünik az *X* komplementer a bal oldalról, ha mindkét oldalt elmetszük *X*-szel:

$$\begin{array}{rcc}(A-X)\cup B&=&X\\(A\cap\overline{X})\cup B&=&X\\((A\cap\overline{X})\cup B)\cap X&=&X\cap X\\(A\cap\overline{X}\cap X)\cup(B\cap X)&=&X\\(A\cap\emptyset)\cup(B\cap X)&=&X\\B\cap X&=&X\end{array}$$

ez utóbbi pontosan azt jelenti, hogy *X* *B*. Emellett a feltétel mellett B-vel a baloldalon "http://wiki.math.bme.hubeuniózva"http://wiki.math.bme.hu:

$$[\,X=\,]\qquad(A\cap\overline{X})\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{X}\cup B)\supseteq(A\cup B)\cap(\overline{X}\cup X)=(A\cup B)\cap U=A\cup B$$

amib?l következik, hogy *B* *X* és *A* *X*. Ez azt jelenti, hogy ha van megoldás, akkor az egyértelm? éspedig

$$X=B$$

Most vizsgáljuk meg a megoldhatóság feltételét. Azt kaptuk, hogy ha van megoldás, akkor A $X = B$, vagyis

$$A \subseteq B$$

De ez elégséges feltétele is a megoldhatóságnak, ugyanis ekkor az $X = B$ helyettesítés kielégíti az egyenletet:

$$(A \cap \overline{B}) \cup B = \emptyset \cup B = B$$

9. Oldja meg az alábbi halmazegyenleteket, X-re!

$$A - X = X - A$$

Mo.

$$A - X = X - A$$

vagyis

$$A \cap \overline{X} = X \cap \overline{A}$$

Ha van megoldás és bemetszünk mindkét oldalon A-val, akkor

$$A \cap A \cap \overline{X} = X \cap \overline{A} \cap A$$
$$A \cap \overline{X} = \emptyset$$

azaz A X, de az egyenlet *szimmetrikus* az A és az X felcserélésére, ezért X A is teljesül, amib?l $X = A$, ha van megoldás. Márpedig az egyenletet az $X = A$ kielégíti.