

Tartalomjegyzék

- 1
 Gauss-elimináció-témakör
 - ◆ 1.1 Paraméteres egyenletrendszer
 - ◇ 1.1.1
 Megoldás
 - ◆ 1.2 Paraméteres mátrixrang
- 2 Lináris leképezés sajátértéke
 - ◆ 2.1 Példa
 - ◇ 2.1.1
 Megoldás
 - ◆ 2.2 Példa
 - ◇ 2.2.1
 Megoldás
- 3 Függvényterek
 - ◆ 3.1 Példa
 - ◇ 3.1.1
 Megoldás
- 4 Iterált határérték
 - ◆ 4.1 Példa
 - ◇ 4.1.1
 Megoldás
 - ◆ 4.2 Példa
 - ◇ 4.2.1
 Megoldás
 - ◆ 4.3 Példa
 - ◇ 4.3.1
 Megoldás
 - ◆ 4.4 Példa
 - ◇ 4.4.1
 Megoldás

Gauss-elimináció-témakör

Paraméteres egyenletrendszer

Milyen a valós paraméterre oldható meg az alábbi egyenletrendszer?

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & & = & 0 \end{array}$$

Megoldás

Az $A(a) \cdot x = b$ egyenletrendszer kib?vített mátrixa és a Gauss-elimináció

$$[\mathbf{A}(a)|b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & a & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & a-9 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & -6 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha a mátrix rangja egyenl? a kib?vített mátrix rangjával. Világos, hogy

$$r(\mathbf{A}(a)) = 3, \text{ ha } a \neq 3 \text{ és}$$

$$r(\mathbf{A}(a)) = 2, \text{ ha } a = 3$$

Az els? esetben a $[\mathbf{A}(a)|b]$ csak 3 lehet (csak három sora van), míg a másodikban $[\mathbf{A}(a)|b]$ rangja 3, mert három független oszlopvektor választható ki bel?le (pl az els?, a második és a negyedik). Tehát $a \neq 3$ esetén lesz megoldása az egyenletrendszernek.

Megjegyzés. Úgy is fogalmazhatunk, hogy akkor és csak akkor van megoldás, ha az alsó sorban nem áll ellentmondás. Ez akkor van, ha az $(a-3)z=-6$ -ból kifejezhetjük z -t, vagyis az $a \neq 3$ esetén vagy ha az alsó sor $0=0$ alakú, ami ugye nem áll.

Paraméteres mátrixrang

Lásd az el?z? feladatot!

Lináris leképezés sajátértéke

Példa

Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixú leképezés 111-edik hatványának sajátvektorait!

Megoldás

A bázisvektorok képei: $(2,2)$ és $(1,1)$, azaz mindkett?t az $y = x$ egyenlet? altérbe képezi az operátor. Világos, hogy ekkor a sajátaltér a $\mu.(1,1)$ alakú vektorok.

Példa

Számítsuk ki a x tengely körüli $+36^\circ$ -os forgatás 15-ödik és 17-edik hatványának sajátvektorait és sajátértékeit!

Megoldás

Ha $\mathbf{A}$ ez a lineáris operátor, akkor els? hatványa a $+36^\circ$ -os forgatás, a második a $2 \cdot 36^\circ$ -os forgatás, ..., a 15-ödik hatványa a $15 \cdot 36^\circ = 360 + 180 = 180^\circ$ -os forgatás. Ennek sajátvektorai az x tengely vektorai, 1 sajátértékkel., De a 17-edik hatvány is csak egy forgatás, így ennek is ugyanezek lesznek a sajátvektorai (360° -nál már más lenne a helyzet, ott minden vektor fix).

Függvényterek

Példa

Legyen L az $\mathbf{R}$ -en értelmezett valós függvények következő lineáris altere:

$$L =_{\text{def}} \{Ae^{2x} + B \sin(3x) + C \cos(3x) \mid A, B, C \in \mathbf{R}\}$$

(azaz az $\exp(2 \cdot \cdot)$, a $\sin(3 \cdot \cdot)$ és a $\cos(3 \cdot \cdot)$ függvények által kifeszített altér.) Adjuk meg L bázisát, igazoljuk, hogy

$$\mathcal{A}f =_{\text{def}} f' + 4f$$

lineáris operátor és adjuk meg egy mátrixát!

Megoldás

$$B = \{e^{2x}; \sin(3x); \cos(3x)\}$$

boztosan generátorrendszere L -nek. Lássuk be, hogy B független. Tegyük fel ugyanis, hogy minden x valós számra

$$Ae^{2x} + B \sin(3x) + C \cos(3x) \equiv 0$$

Ekkor $x = 0$ -t véve:

$$A + C = 0$$

illetve $x = 2\pi$ -t véve is:

$$Ae^{4\pi} + C = 0$$

mely két egyenletet kivonva

$$A + Ae^{4\pi} = 0$$

azaz $A = 0$. Viszont ekkor $C = 0$ -is teljesül és B csak nulla lehet, mert a szinuszfüggvény nem az azonosan nulla. Tehát a fenti egyenlőségnek csak triviális megoldása van A, B, C -ben.

Térjünk rá az operátor linearitására. A deriválás lineáris, a 4-gyel való szorzás lineáris és a leképezések összege lineáris, tehát $\mathcal{A}$ lineáris. Adjuk meg a mátrixot! A bázisok képei:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}e^{2x} &= 2e^{2x} + 4e^{2x} = 6e^{2x} \\ \mathcal{A}\sin(3x) &= 3\cos(3x) + 4\sin(3x) \\ \mathcal{A}\cos(3x) &= -3\sin(3x) + 4\cos(3x)\end{aligned}$$

Így

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Iterált határérték

Példa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + y^4}$$

Megoldás

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + y^4} = \begin{cases} \frac{x^4}{x^4 + 0} = 1 & , \quad x \neq 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0 + y^4} = 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

Példa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^5}{x^4 + y^4}$$

Megoldás

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^5}{x^4 + y^4} = \begin{cases} \frac{0}{x^4 + 0} = 0 & , \quad x \neq 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^5}{0 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Tehát $g = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^5}{x^4 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

Példa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{y}\right)$$

Megoldás

Megoldás

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{y}\right) = \begin{cases} \nexists & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Tehát g egyetlen pontból áll, és pedig a 0-nál 0. Ilyen (egypontú) függvények nincs határértéke:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

Példa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (x + |x|) \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

Megoldás

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} (x + |x|) \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right) = \begin{cases} \nexists \lim_{y \rightarrow 0} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Tehát g csak a nemnegatívokon értelmezett és ott 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$